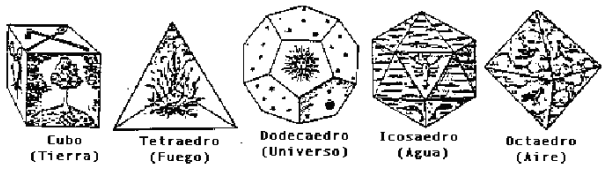
Unidad 8

Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos



Concepción platónica de los poliedros como regidores del Universo.

El conocimiento y uso de los cuerpos geométricos data desde los tiempos prehistóricos, algunos registros suponen el trabajo con los poliedros regulares desde el periodo neolítico (aproximadamente 1500 a. C.) en el cual se identificaron poliedros regulares labrados en piedra, estos cinco poliedros fueron considerados por los pitagóricos como perfectos y aunque no demostraron que eran los únicos, sí sabían que solo existían esos; con el aporte de Platón y la justificación de este resultado en el libro *Los elementos* de Euclides es que logra quedar establecido.

Los poliedros se han utilizado a lo largo de la historia en construcciones arquitectónicas como elementos representativos del arte, la belleza y la perfección; entre los cuerpos geométricos más utilizados se encuentran las pirámides, cilindros, cubos, prismas, entre otros.



Gran Pirámide de Giza, construida por los antiguos egipcios.

En esta unidad aprenderás sobre figuras planas, el estudio de los triángulos y la construcción de algunas rectas notables con regla y compás; el estudio de la circunferencia, además de lo correspondiente a los poliedros regulares, prismas, pirámides y cuerpos redondos. Se hará un análisis de las rectas y planos en el espacio para establecer los patrones y las proyecciones de los cuerpos geométricos.

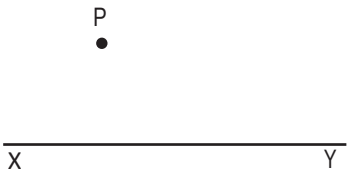
1.1 Puntos y rectas

P

1. En la imagen de la derecha se tienen los puntos A y B.
   a) Traza líneas rectas que pasen solo por A.
   b) Traza líneas rectas que pasen a la vez por A y por B.

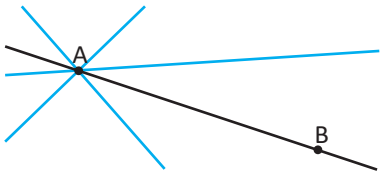


2. En la imagen se tiene la recta XY y el punto P.
   a) Traza rectas que pasen por P y que corten a la recta XY.
   b) Traza rectas que pasen por P, pero que nunca corten a la recta XY.

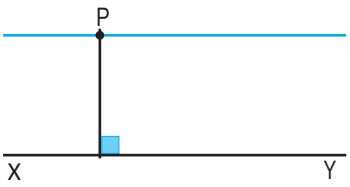


S

1. a) Se pueden trazar distintas rectas, en realidad, infinitas líneas rectas que pasen por el punto A.
   b) Únicamente existe una línea recta que pase por los dos puntos.

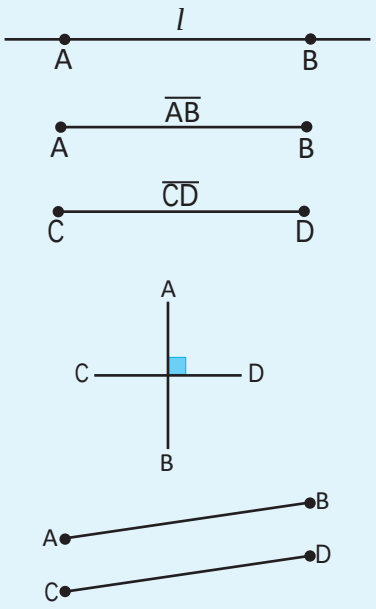


2. a) De entre todas las rectas que se pueden trazar hay una que es perpendicular a la recta XY.
   b) La recta trazada debe ser la paralela que pase por P.

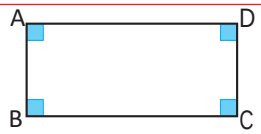


C

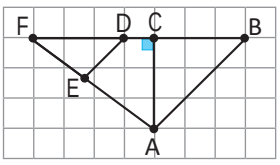
a) La línea que pasa por los puntos A, B y se extiende indefinidamente se llama **línea recta AB**, regularmente se denota con una letra por ejemplo l, m, etc.
b) A la figura formada por la unión de A y B se le llama **segmento AB**, se simboliza como $\overline{AB}$ y se lee "segmento AB".
c) Si dos segmentos tienen igual longitud, tal como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, entonces se simboliza como AB = CD. Al referirse a la longitud de un segmento se omite el símbolo ($\overline{\ }$) en la escritura. La longitud de $\overline{AB}$ es AB.
d) Cuando una recta corta a otra formando un ángulo de 90° se les llama **rectas perpendiculares**; se utiliza el símbolo (⊥) para representar este hecho. En la imagen $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ y se lee "el segmento AB es perpendicular al segmento CD".
e) A dos rectas que jamás se corten una con la otra se les llama **rectas paralelas** y se utiliza el símbolo (∥). En la imagen $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ se lee "el segmento AB es paralelo al segmento CD".



1. Observa el siguiente rectángulo, utiliza los símbolos (∥) o (⊥) para establecer la relación entre los siguientes segmentos.
   La relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. **AB ∥ CD**
   La relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. **AB ⊥ AD**
   La relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. **AB ⊥ BC**



2. En la siguiente figura utiliza los símbolos (∥) o (⊥) para indicar cuáles de los segmentos, que se muestran, son paralelos y cuáles son perpendiculares.
   Paralelos: DE ∥ AB · Perpendiculares: FB ⊥ CA



Ejercicio 1. Observa el rectángulo ABCD y utiliza los símbolos (∥) o (⊥) para establecer la relación entre los siguientes segmentos

La relación entre AB y CD.

En el rectángulo, AB y CD son los lados verticales: quedan uno frente al otro y nunca se cortan, es decir, son paralelos.

Respuesta: AB ∥ CD

La relación entre AB y AD.

El lado AB es vertical y el lado AD es horizontal; se cortan en el vértice A formando un ángulo de 90°, como lo indica la marca de ángulo recto de la figura.

Respuesta: AB ⊥ AD

La relación entre AB y BC.

El lado AB es vertical y el lado BC es horizontal; se cortan en el vértice B formando un ángulo de 90°, como lo indica la marca de ángulo recto de la figura.

Respuesta: AB ⊥ BC

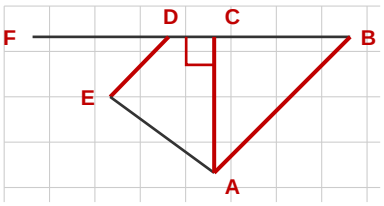
Ejercicio 2. En la siguiente figura utiliza los símbolos (∥) o (⊥) para indicar cuáles de los segmentos que se muestran son paralelos y cuáles son perpendiculares

En la figura se muestran los segmentos FB, DE, EA, CA y AB, con los puntos D y C sobre FB y el punto E sobre FA.

Se comparan las direcciones de los segmentos de la figura. El segmento CA es vertical y el segmento FB es horizontal: son perpendiculares, y así lo confirma la marca de ángulo recto dibujada en C. El segmento DE y el segmento AB tienen la misma inclinación (al avanzar 1 unidad hacia un lado se avanza 1 en el otro, en sentidos correspondientes), por lo que son paralelos. Las demás parejas no son ni paralelas ni perpendiculares.

Respuesta: Paralelos: DE ∥ AB. Perpendiculares: FB ⊥ CA

Figura con las relaciones encontradas (en rojo, DE ∥ AB y FB CA):

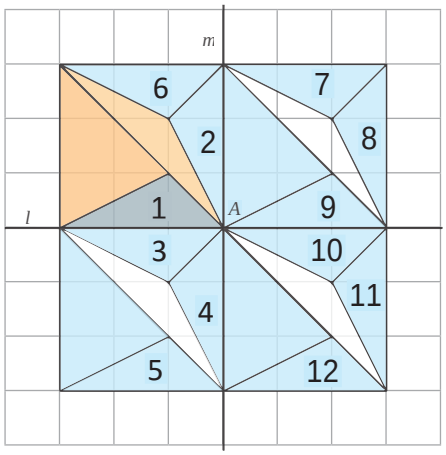


1.2 Patrones de figuras

P

La imagen ha sido creada a partir de los desplazamientos de las figuras coloreadas con un tono más fuerte. Responde lo siguiente:

a) ¿Con cuál de las figuras se sobrepondrá la figura 1 si se desplaza de forma paralela?
b) Si se dobla la imagen por la recta l, ¿sobre cuál figura se sobrepondrá la figura 1?
c) Si se gira la figura 1 con un ángulo de 90° en sentido antihorario con respecto al punto A, ¿con cuál de las figuras se sobrepone?



S

a) Si se desplaza de forma paralela la figura 1, esta puede sobreponerse sobre las figuras 9, 5 y 12.
b) Si se dobla la imagen por la recta l, la figura 1 se sobrepondrá sobre la figura 3.
c) Si se gira la figura 1 con un ángulo de 90°, y el giro es en sentido antihorario, se sobrepondrá sobre la figura 4.

C

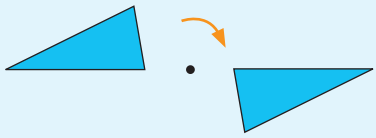
El movimiento de una figura sin cambiar su tamaño o forma recibe un nombre según la manera en la que se hace.

Existen tres tipos de movimiento:

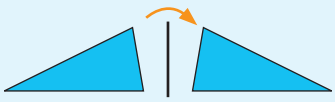
Traslación



Rotación



Simetría



E

Existe una técnica para crear obras de arte utilizando la traslación, rotación o simetría de una figura, esta consiste en cubrir un plano utilizando la figura, las cuales se mueven de forma que no queden huecos en todo el plano ni se traslapen.

A esta técnica se le llama **Teselado**.

Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972) es uno de los artistas gráficos más famosos del mundo. Su arte es disfrutado por millones de personas en todo el mundo. Escher utilizó mucho el teselado en sus obras.



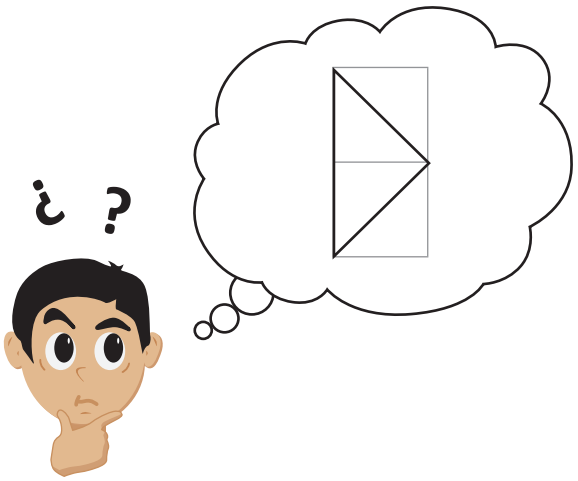
Horse/Bird (No.76) 1949 Colored pencil, ink, watercolor. De M. C. Escher. Retomado de la página oficial de www.mcescher.com



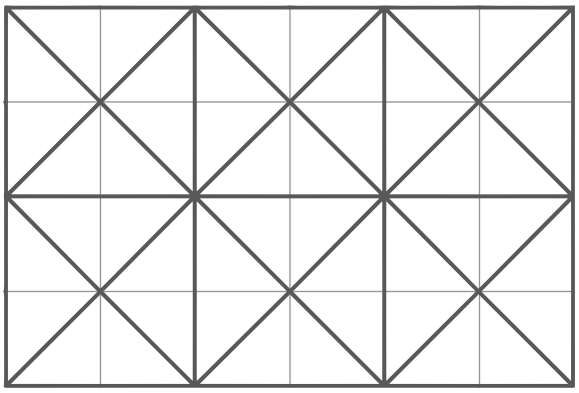
Retrato de Esher en Roma. De M. C. Escher.



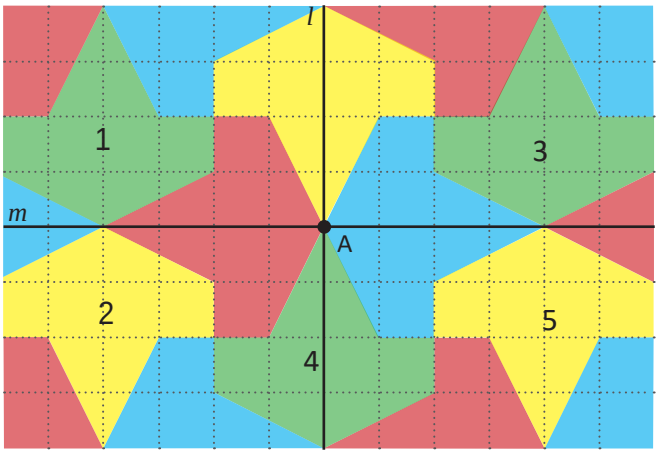
Carlos pensó en utilizar un triángulo como el que se muestra en la imagen para llenar una cuadrícula sin dejar espacio alguno y sin que se traslaparan.



Y obtuvo el resultado que se observa en la imagen.

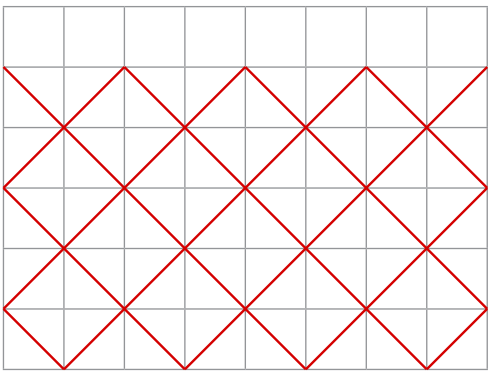


1. Según lo aprendido, una figura puede moverse en el plano mediante una traslación, rotación o simetría.
   Con base en la imagen de la derecha, responde las siguientes preguntas. Los ejes pueden ser las rectas l y m y el punto de rotación será A.
   a) ¿Qué tipo de movimiento debe realizarse para sobreponer la figura 1 a la figura 5?
   b) ¿Con cuáles figuras se sobrepondría la figura 1 si se realiza una traslación?
   c) Si se dobla la imagen por la recta m, ¿a cuál figura se sobrepondrá la figura 1?, ¿y si se hace respecto a la recta l?



a) Rotación de 180° respecto al punto A
b) Se sobrepone a la figura 3
c) Por la recta m: la figura 2; por la recta l: la figura 3

2. **¡Construyendo teselados!** Piensa cómo hizo Carlos el teselado en el ejemplo presentado y llena las siguientes cuadrículas, utilizando únicamente una figura simple, repitiéndola varias veces sin dejar espacio vacío.



Ejemplo: triángulos rectángulos



Ejemplo: rectángulos (ladrillos)

¡Compara con tus compañeros!

Ejercicio 1. Con base en la imagen, responde las siguientes preguntas. Los ejes pueden ser las rectas l y m y el punto de rotación será A

a) ¿Qué tipo de movimiento debe realizarse para sobreponer la figura 1 a la figura 5?

La figura 5 está en el lado opuesto de la figura 1 respecto al punto A y aparece girada media vuelta (su punta queda hacia abajo). Ese movimiento es una rotación de 180° con centro en el punto A (rotación simétrica).

Respuesta: Una rotación de 180° respecto al punto A

b) ¿Con cuáles figuras se sobrepondría la figura 1 si se realiza una traslación?

En una traslación la figura conserva exactamente su forma y su orientación. De las figuras numeradas, la que coincide con la figura 1 en forma y orientación es la figura 3, que está a su derecha (las demás están giradas o invertidas).

Respuesta: Con la figura 3

c) Si se dobla la imagen por la recta m, ¿a cuál figura se sobrepondrá la figura 1?, ¿y si se hace respecto a la recta l?

Al doblar por la recta m (el eje horizontal que pasa por A), la figura 1, que está arriba de m, cae sobre la figura que está justo debajo, invertida de arriba hacia abajo: la figura 2. Al doblar por la recta l (el eje vertical que pasa por A), la figura 1 cae sobre su imagen especular de la derecha: la figura 3.

Respuesta: Por la recta m: la figura 2; por la recta l: la figura 3

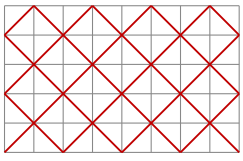
Ejercicio 2. ¡Construyendo teselados! Piensa cómo hizo Carlos el teselado en el ejemplo presentado y llena las siguientes cuadrículas, utilizando únicamente una figura simple, repitiéndola varias veces sin dejar espacio vacío

¡Compara con tus compañeros!

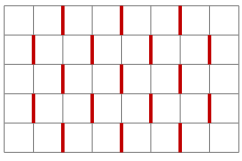
Ejemplo de solución: en la primera cuadrícula se repite el triángulo rectángulo de Carlos (cada cuadrado de la cuadrícula se divide con una diagonal, alternando la dirección de la diagonal), de modo que los triángulos se tocan sin dejar huecos ni traslaparse. En la segunda cuadrícula se repite un rectángulo de 2 × 1 colocado como ladrillos (cada fila desplazada medio rectángulo), que también cubre la cuadrícula por completo. Sobre las cuadrículas impresas de la página del libro se muestra uno de estos ejemplos dibujado en rojo.

Respuesta: Ejemplo: teselado de triángulos rectángulos y teselado de rectángulos tipo ladrillo (dibujados en la página del libro)

Teselados de ejemplo:



Triángulos rectángulos

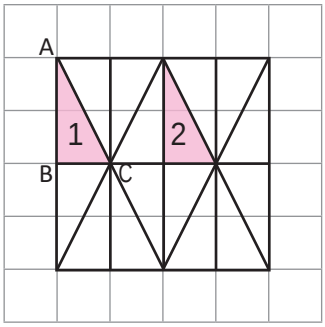


Rectángulos (ladrillos)

1.3 Traslación

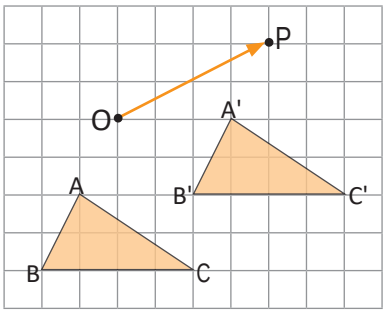
P

1. Observa la figura, al trasladarse el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.
   a) Identifica los puntos A' y C' los cuales son los trasladados de los puntos A y C.
   b) Traza $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.
   c) Expresa simbólicamente la relación que hay entre la longitud de $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$.
   d) ¿Qué movimiento hay que aplicar al triángulo 1 para que se sobreponga el triángulo 2?



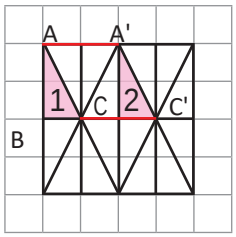
Para denotar un triángulo con vértices A, B y C se utiliza el símbolo "Δ", escribiendo ΔABC, y se lee "el triángulo ABC".

2. El ΔA'B'C' es el trasladado del ΔABC en la dirección y por la longitud que indica la flecha OP. Observa que la flecha avanza 4 unidades a la derecha y 2 hacia arriba.
   a) Traza $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ que unen los vértices correspondientes de los dos triángulos.
   b) Expresa simbólicamente la relación que existe entre los segmentos mencionados en a).



S

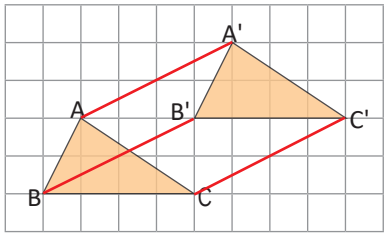
1. a) y b)



c) La relación que existe entre $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$ se expresa como $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$. Además $AA' = CC'$.

d) Al triángulo 1 debe aplicarse una traslación para sobreponerse al triángulo 2.

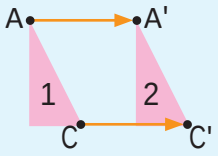
2. a)



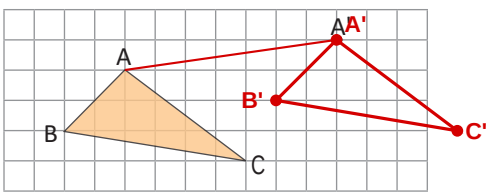
b) La relación entre los segmentos se expresa así:
$\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$ y $AA' = BB' = CC'$.

C

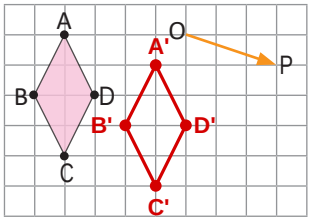
En la traslación, los segmentos correspondientes son paralelos y tienen la misma longitud, es decir, la traslación conserva distancias. Tal y como en el problema anterior que se tenía $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$ y $AA' = CC'$.



1. Dibuja $\overline{AA'}$ y elabora el ΔA'B'C' con base en la dirección y longitud de $\overline{AA'}$, de modo que sea el trasladado del ΔABC.



2. Dibuja la figura trasladada A'B'C'D' del cuadrilátero ABCD, utilizando la dirección y la distancia dada por la flecha OP.



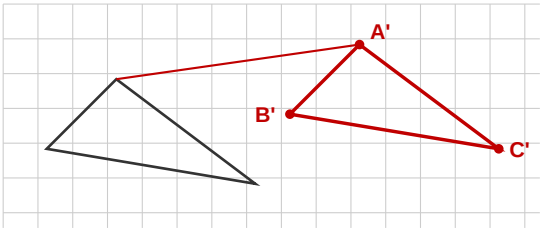
Ejercicio 1. Dibuja AA' y elabora el ΔA'B'C' con base en la dirección y longitud de AA', de modo que sea el trasladado del ΔABC

En la cuadrícula están el ΔABC y el punto A', imagen del punto A.

Se cuenta el desplazamiento de A hasta A' en la cuadrícula: 7 unidades a la derecha y 1 hacia arriba. Se traza el segmento AA' y se aplica el mismo desplazamiento a los otros vértices: B' queda 7 a la derecha y 1 arriba de B, y C' queda 7 a la derecha y 1 arriba de C (sobre el borde derecho de la cuadrícula). Al unir A', B' y C' se obtiene el triángulo trasladado, que se muestra en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: **El ΔA'B'C' trasladado 7 unidades a la derecha y 1 hacia arriba (dibujado en la página del libro)**

Traslación del ΔABC (en rojo, con el segmento AA'):



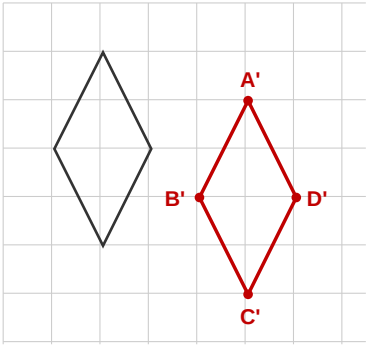
Ejercicio 2. Dibuja la figura trasladada A'B'C'D' del cuadrilátero ABCD, utilizando la dirección y la distancia dada por la flecha OP

La flecha OP indica la dirección y la distancia de la traslación.

La flecha OP avanza 3 unidades a la derecha y 1 hacia abajo en la cuadrícula. Se aplica ese desplazamiento a cada vértice del rombo ABCD: A' queda 3 a la derecha y 1 abajo de A, y así con B', C' y D'. Al unir los puntos se obtiene el cuadrilátero trasladado, que se muestra en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: **El cuadrilátero A'B'C'D' trasladado 3 unidades a la derecha y 1 hacia abajo (dibujado en la página del libro)**

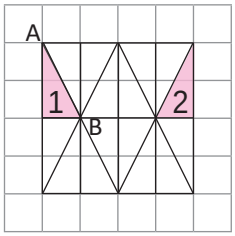
Traslación del cuadrilátero ABCD (en rojo):



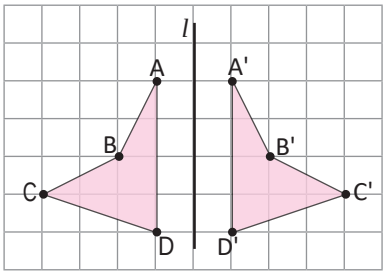
1.4 Simetría

P

1. Al mover el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.
   a) Identifica los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los cuales se sobreponen los puntos A y B al mover el triángulo 1.
   b) ¿Cómo se debe mover el triángulo 1 para sobreponerse al triángulo 2?

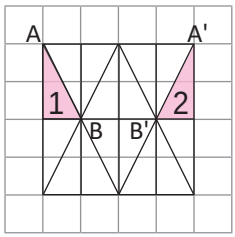


2. El cuadrilátero A'B'C'D' del lado derecho se ha obtenido de mover el cuadrilátero ABCD.
   a) Traza los segmentos por los que se conectan los vértices correspondientes.
   b) Expresa simbólicamente la relación entre los segmentos trazados en a) y la recta l.
   c) Nombra M al punto que es la intersección entre $\overline{CC'}$ y l.
   d) Expresa simbólicamente la relación entre $\overline{CM}$ y $\overline{C'M}$.



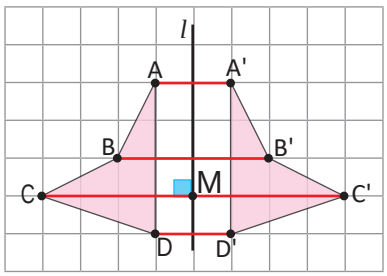
S

1. a)



b) Se debe hacer una simetría.

2. a) y c)



b) La relación entre la recta l y cada segmento se expresa con el símbolo ($\perp$). Por ejemplo, $\overline{AA'} \perp l$.
d) La relación entre $\overline{CM}$ y $\overline{C'M}$ se expresa como: $CM = C'M$.

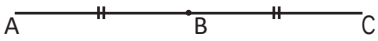
C

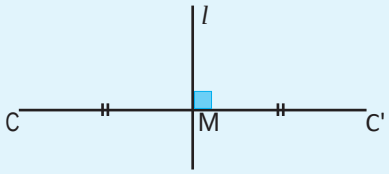
El movimiento que se realiza doblando el dibujo por medio de un eje se llama **simetría** y el eje se llama **eje de simetría**.

En la simetría, el segmento que conecta 2 puntos correspondientes se intersecta con el eje perpendicularmente, formando dos segmentos iguales. Así en el ejemplo $\overline{CC'} \perp l$ y $CM = C'M$.

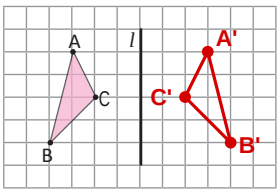
En el ejemplo la recta l pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento $\overline{CC'}$. A esta recta se le llama **mediatriz** de $\overline{CC'}$.

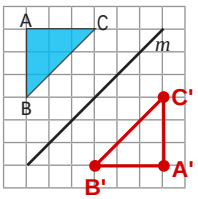
En geometría se utilizan símbolos como ıı para denotar que dos o más segmento son iguales, por ejemplo, para denotar que AB = BC se hace:





Dibuja la figura simétrica en cada imagen, respecto a la recta l y la recta m respectivamente.





Traza adecuadamente segmentos perpendiculares a m.

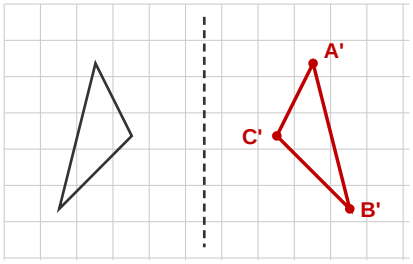
Dibuja la figura simétrica en cada imagen, respecto a la recta l y la recta m respectivamente

Primera imagen: el triángulo ABC y la recta vertical l.

Cada vértice se refleja en la recta l como en un espejo: el punto imagen queda sobre la perpendicular al eje, a la misma distancia del otro lado. A' queda 3 unidades a la derecha del eje a la altura de A; B', 4 unidades a la derecha a la altura de B; C', 2 unidades a la derecha a la altura de C. Al unir A', B' y C' se obtiene el triángulo simétrico, dibujado en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: El triángulo A'B'C' simétrico respecto a la recta l (dibujado en la página del libro)

Figura simétrica respecto a la recta l (en rojo):

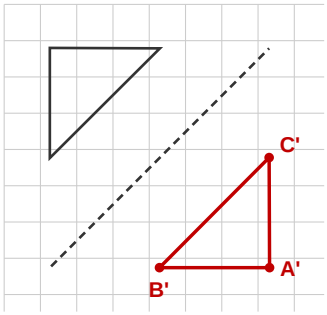


Segunda imagen: el triángulo ABC y la recta diagonal m. Traza adecuadamente segmentos perpendiculares a m.

Desde cada vértice se traza la perpendicular a la recta m y se prolonga la misma distancia del otro lado: así se obtienen A', B' y C'. Como m es una diagonal a 45°, la perpendicular desde cada vértice también va a 45° y los puntos imagen quedan en las intersecciones de la cuadrícula, formando el triángulo simétrico en la parte inferior derecha. Se muestra en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: El triángulo A'B'C' simétrico respecto a la recta m (dibujado en la página del libro)

Figura simétrica respecto a la recta m (en rojo):



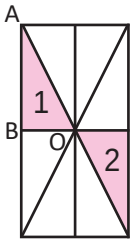
1.5 Rotación

P

Al mover el triángulo 1 de la imagen, se puede sobreponer al triángulo 2.

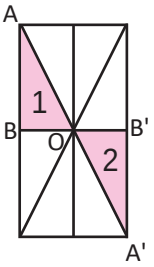
a) Coloca los puntos A' y B' en el triángulo 2, a los cuales se sobreponen los puntos A y B al trasladar el triángulo 1.

b) ¿Cómo se debe mover el triángulo 1 para sobreponerse al triángulo 2?



S

a)

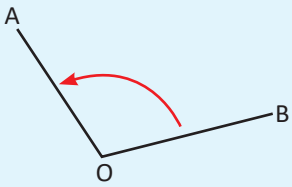


b) El triángulo 1 se puede sobreponer al triángulo 2 aplicando una rotación respecto al punto O y por un ángulo de 180°.

C

Al movimiento de una figura con un determinado ángulo respecto a un punto central se le llama **rotación**.

Generalmente, el sentido del ángulo de rotación se considera en contra de las agujas del reloj. Por ejemplo, la imagen muestra la rotación de OB a OA con el ∢BOA.

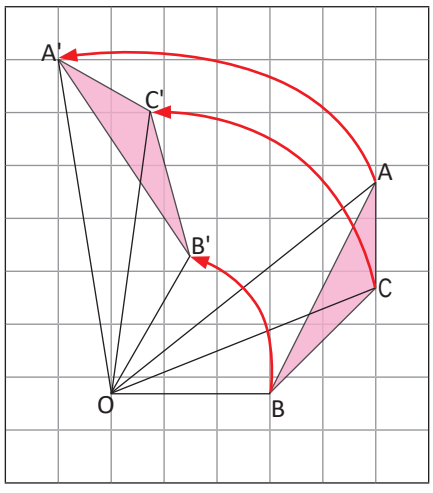


E

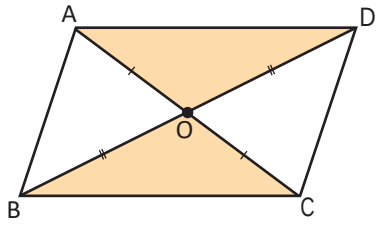
Tomando como centro de rotación el punto O, se ha rotado el ΔABC por un ángulo de 60° para llegar a ser el ΔA'B'C'.

a) ¿Qué relación hay entre $\overline{OA}$ y $\overline{OA'}$?

b) ¿Qué figura describe el movimiento del punto A hasta el punto A'?



Cuando se hace una simetría por rotación con un ángulo de 180°, se le llama **rotación simétrica**. Como en la figura, al rotar 180° el ΔAOD, respecto del punto O, este se puede sobreponer al triángulo correspondiente del mismo color. Observa los lados que son correspondientes. Se puede concluir que en un paralelogramo sus diagonales se bisecan, es decir se cortan en segmentos iguales.

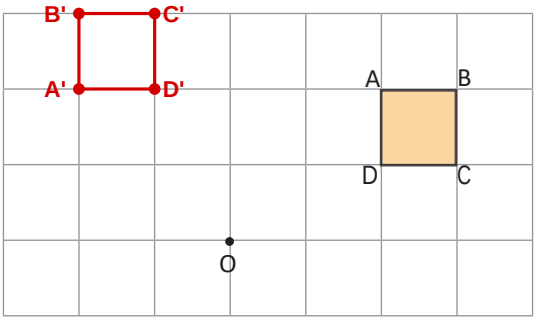


Solución.

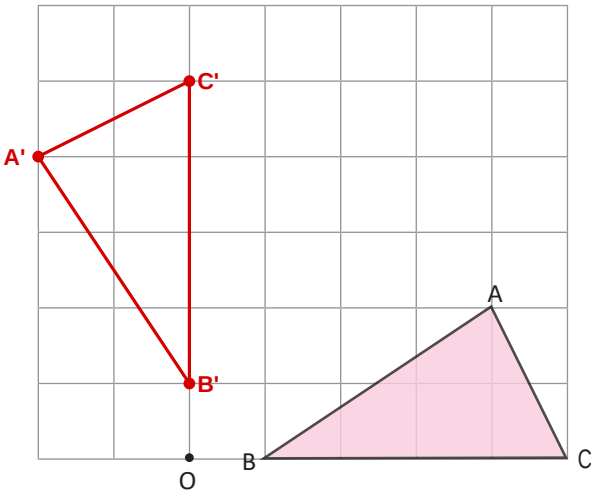
a) OA = OA'

b) Se forma una parte de la circunferencia que tiene como radio OA y como centro el punto O.

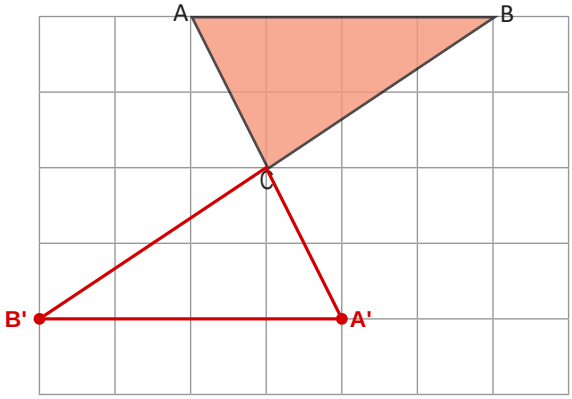
1. Dibuja el paralelogramo A'B'C'D', que es el rotado con respecto al punto O y un ángulo de 90° del paralelogramo ABCD. Utiliza tu compás y transportador.



2. Dibuja el ΔA'B'C' que es el rotado del ΔABC mediante una rotación con respecto al punto O y un ángulo de 90°.



3. Realiza una rotación de la siguiente figura respecto al punto C:



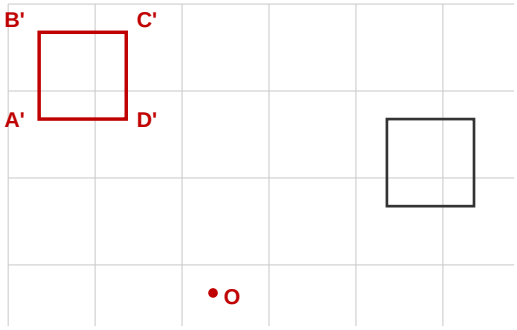
Ejercicio 1. Dibuja el paralelogramo A'B'C'D', que es el rotado con respecto al punto O y un ángulo de 90° del paralelogramo ABCD. Utiliza tu compás y transportador

El paralelogramo de la figura es el cuadrado ABCD y el centro de rotación es el punto O.

Se rota cada vértice 90° en sentido antihorario alrededor de O (el sentido que la clase indica como general). Con el compás se copia la distancia de O a cada vértice y con el transportador se mide el ángulo de 90°: el punto A, que está 2 unidades a la derecha y 2 arriba de O, queda 2 a la izquierda y 2 arriba de O; B, que está 3 a la derecha y 2 arriba, queda 2 a la izquierda y 3 arriba; C queda 3 a la izquierda y 3 arriba, y D queda 3 a la izquierda y 2 arriba. El cuadrado rotado se muestra en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: **El cuadrado A'B'C'D' rotado 90° respecto a O (dibujado en la página del libro)**

Cuadrado rotado 90° respecto a O (en rojo):



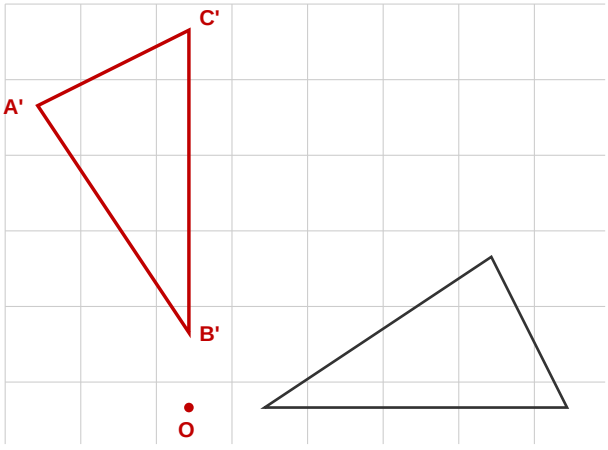
Ejercicio 2. Dibuja el ΔA'B'C' que es el rotado del ΔABC mediante una rotación con respecto al punto O y un ángulo de 90°

El centro de rotación es el punto O, que está sobre la misma fila que B y C.

Se rota cada vértice 90° en sentido antihorario alrededor de O. El punto B, que está 1 unidad a la derecha de O, queda 1 unidad arriba de O; el punto C, que está 5 unidades a la derecha de O, queda 5 unidades arriba de O; y el punto A, que está 4 unidades a la derecha y 2 arriba de O, queda 2 unidades a la izquierda y 4 arriba de O. El triángulo rotado se muestra en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: **El ΔA'B'C' rotado 90° respecto a O (dibujado en la página del libro)**

Triángulo rotado 90° respecto a O (en rojo):



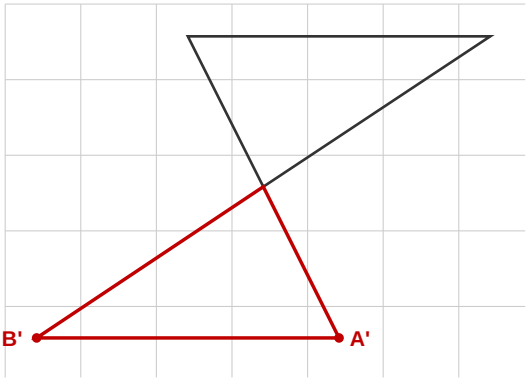
Ejercicio 3. Realiza una rotación de la siguiente figura respecto al punto C

El enunciado no indica el ángulo de rotación; se aplica una rotación de 180° (rotación simétrica) respecto al punto C, que es la rotación trabajada en esta clase.

En la rotación de 180° cada punto se mueve al lado opuesto de C, a la misma distancia: el punto A, que está 1 unidad a la izquierda y 2 arriba de C, queda 1 a la derecha y 2 abajo de C; el punto B, que está 3 a la derecha y 2 arriba de C, queda 3 a la izquierda y 2 abajo de C; el punto C queda fijo. El triángulo rotado apunta hacia arriba y se muestra en rojo sobre la figura del libro.

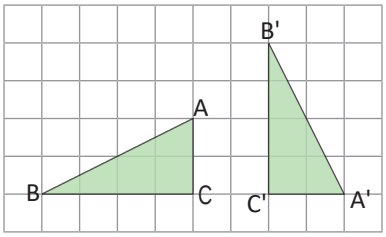
Respuesta: El triángulo rotado 180° respecto al punto C (dibujado en la página del libro)

Triángulo rotado 180° respecto al punto C (en rojo):



1.6 Resolución de problemas de movimiento de figuras

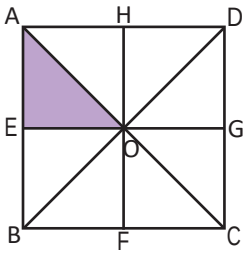
¿Cómo debe moverse el ΔABC para lograr sobreponerse al ΔA'B'C'?



Un ejemplo de solución es, primero se mueve el ΔABC con una rotación con respecto al punto C y con un ángulo de 90° en sentido horario, luego se traslada la figura en la dirección de C a C' de $\overline{CC'}$.

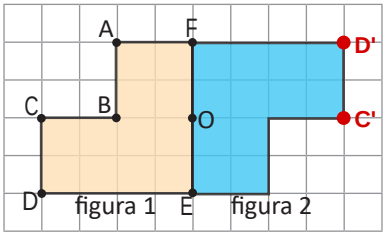
Como en los triángulos ΔABC y ΔA'B'C' cuando se mueve una figura y se logra sobreponer sobre otra, se dice que las dos figuras son **congruentes**.

1. En la siguiente figura:
   a) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔODG?
   b) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOBF?
   c) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOCF?



a) Simetría respecto a la recta que pasa por H, O y F
b) Rotación de 90° en sentido antihorario respecto a O
c) Simetría respecto a la recta que pasa por B, O y D

2. Responde los literales según las dos imágenes que se presentan.
   a) Si la figura 2 se ha obtenido de mover la figura 1, coloca los puntos C' y D' en la figura 2 de tal manera que se correspondan a los puntos C y D de la figura 1.
   b) ¿Cómo debe moverse la figura 1 para sobreponerse exactamente a la figura 2?



Rotación de 180° respecto al punto O

3. Haciendo más de un movimiento en la imagen, ¿cómo se puede sobreponer la figura 1 a la figura 2?



Ejemplo: primero una rotación de 90° en sentido horario y luego una traslación hacia la derecha

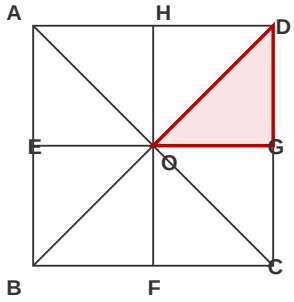
Ejercicio 1. En la siguiente figura (un cuadrado con centro O y el ΔOAE sombreado):

a) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔODG?

El ΔODG está del otro lado del eje vertical que pasa por H, O y F: es la imagen especular del ΔOAE (A corresponde a D y E corresponde a G). El movimiento es una simetría respecto a la recta que pasa por H, O y F.

Respuesta: Una simetría respecto a la recta que pasa por H, O y F

El ΔODG resaltado:

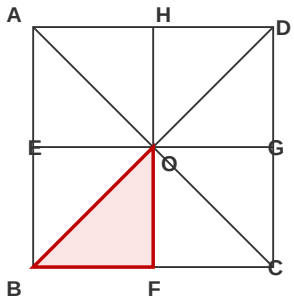


b) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOBF?

El ΔOBF está un cuarto de vuelta del ΔOAE alrededor del centro O, en sentido antihorario: A corresponde a B y E corresponde a F. El movimiento es una rotación de 90° en sentido antihorario respecto al punto O.

Respuesta: Una rotación de 90° en sentido antihorario respecto al punto O

El ΔOBF resaltado:

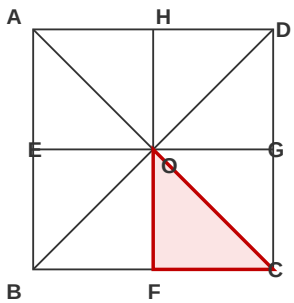


c) ¿Qué movimiento se debe hacer al ΔOAE para sobreponerse al ΔOCF?

El ΔOCF es la imagen especular del ΔOAE respecto a la diagonal que pasa por B, O y D: A corresponde a C y E corresponde a F. El movimiento es una simetría respecto a la recta que pasa por B, O y D.

Respuesta: Una simetría respecto a la recta que pasa por B, O y D

El ΔOCF resaltado:



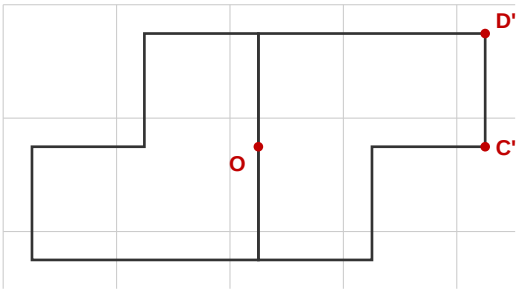
Ejercicio 2. Responde los literales según las dos imágenes que se presentan (figura 1 a la izquierda y figura 2 a la derecha, que comparten el lado FE con el punto O en su mitad)

a) Si la figura 2 se ha obtenido de mover la figura 1, coloca los puntos C' y D' en la figura 2 de tal manera que se correspondan a los puntos C y D de la figura 1.

Con el movimiento que lleva la figura 1 a la figura 2 (una rotación de 180° respecto al punto O, ver el literal b), el punto C, que está a la izquierda del centro a media altura, pasa al extremo derecho de la franja superior de la figura 2, y el punto D, la esquina inferior izquierda de la figura 1, pasa a la esquina superior derecha de la figura 2. Ambos puntos se marcan en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: **C': extremo derecho de la franja superior de la figura 2; D': esquina superior derecha de la figura 2 (marcados en la página del libro)**

Las figuras 1 y 2 con los puntos C' y D' (en rojo):



b) ¿Cómo debe moverse la figura 1 para sobreponerse exactamente a la figura 2?

Al girar la figura 1 media vuelta alrededor del punto O (el punto medio del lado común FE), cada punto cae exactamente sobre la figura 2: A cae en la esquina inferior interior, B en el vértice interior, C en el extremo derecho de la franja superior y D en la esquina superior derecha. El movimiento es una rotación de 180° respecto al punto O.

Respuesta: **Con una rotación de 180° respecto al punto O**

Ejercicio 3. Haciendo más de un movimiento en la imagen, ¿cómo se puede sobreponer la figura 1 a la figura 2?

Las figuras 1 y 2 son dos piezas en forma de L (de tres cuadrados) colocadas sobre la misma cuadrícula.

Ejemplo de solución con dos movimientos: primero se rota la figura 1 un ángulo de 90° en sentido horario (por ejemplo, alrededor de su esquina), con lo que la pieza queda con la parte larga hacia la derecha y el cuadrado extra hacia abajo a la izquierda, igual que la figura 2; después se traslada hacia la derecha hasta quedar exactamente sobre la figura 2.

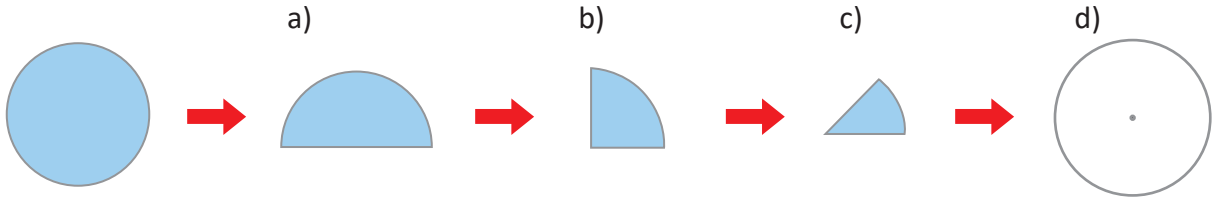
Respuesta: **Ejemplo: rotación de 90° en sentido horario y luego una traslación hacia la derecha**

2.1 Características y elementos del círculo

P

Tal y como se demuestra en las ilustraciones, se dobla un círculo siguiendo los pasos de los literales a), b) y c), sobreponiéndose.

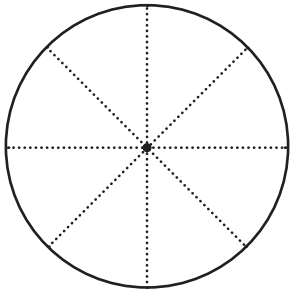
1. ¿Cómo se verían las marcas de los dobleces al abrir el círculo? Dibújalas en el círculo del literal d).



2. Las figuras a), b) y c) son sectores circulares. Encuentra los ángulos de cada uno.

S

1.



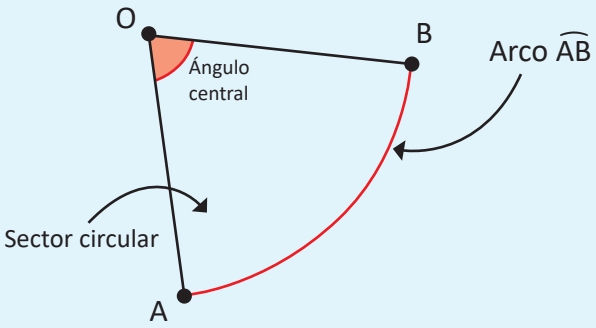
2. Los ángulos de cada sector circular son: a) 180°, b) 90° y c) 45°.

C

Cuando se tienen dos puntos A y B sobre la circunferencia, a la línea limitada por estos puntos se le llama **arco AB** y se expresa como $\overset{\frown}{AB}$.

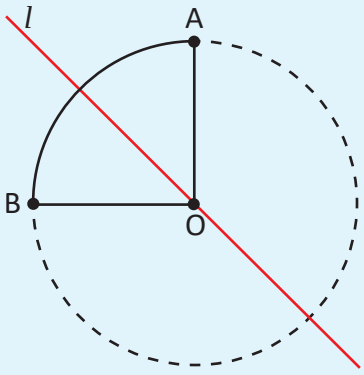
La figura limitada por los radios que pasan por los extremos del arco se llama **sector circular.**

El ángulo formado por los radios es llamado **ángulo central.**



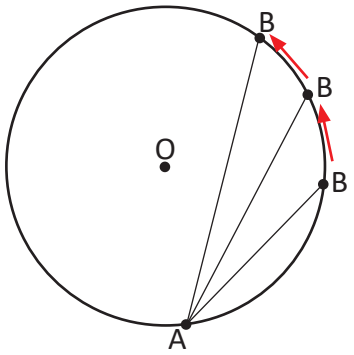
Todo sector circular es una figura simétrica respecto a un eje.

Por ejemplo en la imagen el sector circular OAB es simétrico respecto al eje l que pasa por el punto O y por el punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$.



E

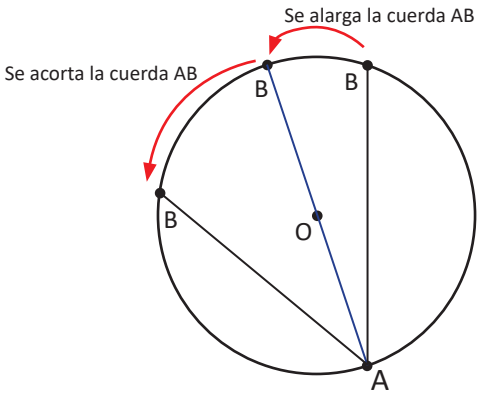
En la circunferencia de centro O se ha trazado la cuerda AB, si A es un punto fijo y B es un punto que se mueve en toda la circunferencia, ¿cuándo alcanzará $\overline{AB}$ su mayor longitud y será un eje de simetría de la circunferencia?



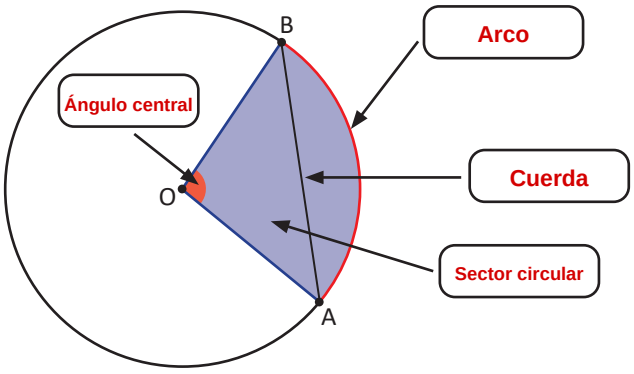
Elementos de un círculo
Centro: El punto que está ubicado en el centro de un círculo.
Radio: El segmento que conecta el centro y cualquier punto del círculo.
Diámetro: El segmento de recta que une dos puntos de un círculo y que pasa por el centro.
Cuerda: Segmento que une dos puntos distintos que se encuentran sobre el círculo.

Solución.

$\overline{AB}$ alcanzará su mayor longitud y será un eje de simetría de la circunferencia, cuando pase sobre el punto O, es decir, cuando $\overline{AB}$ sea el diámetro de la circunferencia.



1. En la siguiente imagen, coloca el nombre correspondiente a cada elemento del círculo.



2. Dada la medida de un radio de 5 cm, dibuja en tu cuaderno los sectores circulares cuyos ángulos centrales sean de
   a) 45° b) 180° c) 240°

(Los tres sectores están dibujados en la página adicional.)

Ejercicio 1. Escribe en las casillas el nombre de cada uno de los elementos que forman parte de un círculo

Las flechas de la figura señalan cuatro elementos del círculo con centro O.

La casilla que está dentro del círculo, junto a la marca roja con vértice en O, corresponde al ángulo formado por dos radios: el ángulo central. La casilla superior derecha señala el borde curvo entre A y B: el arco. La casilla de la derecha, a media altura, señala el segmento que une A con B: la cuerda. La casilla inferior señala la región sombreada comprendida entre dos radios y el arco: el sector circular. Los nombres se escriben en rojo en las casillas de la página del libro.

Respuesta: **Ángulo central, arco, cuerda y sector circular (escritos en las casillas del libro)**

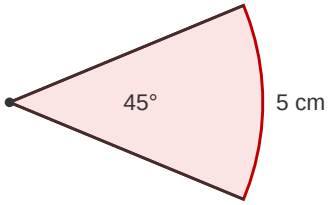
Ejercicio 2. Traza los siguientes sectores circulares en tu cuaderno con un radio de 5 cm

a) Sector circular con ángulo de 45°.

Se traza un círculo de radio 5 cm y, con el transportador, se marca un ángulo central de 45°; el sector es la región entre los dos radios y el arco. Se muestra dibujado en la página adicional.

Respuesta: **Sector de 45° con radio 5 cm (dibujado en la página adicional)**

Sector construido:

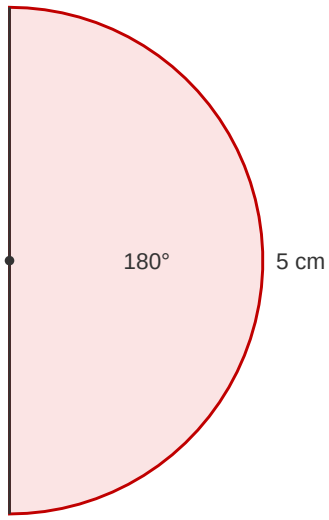


b) Sector circular con ángulo de 180°.

Se traza un círculo de radio 5 cm y un diámetro: el sector de 180° es exactamente medio círculo. Se muestra dibujado en la página adicional.

Respuesta: **Sector de 180° con radio 5 cm: un semicírculo (dibujado en la página adicional)**

Sector construido:

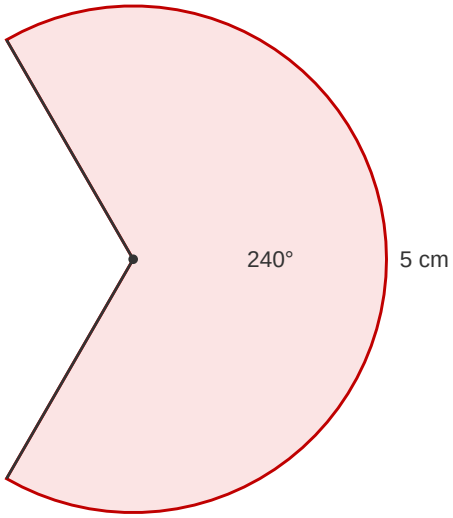


c) Sector circular con ángulo de 240°.

Se traza un círculo de radio 5 cm y, con el transportador, se marca un ángulo central de 240° (más de media vuelta); el sector es la región mayor entre los dos radios y el arco mayor. Se muestra dibujado en la página adicional.

Respuesta: **Sector de 240° con radio 5 cm (dibujado en la página adicional)**

Sector construido:

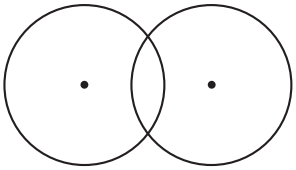


2.2 Características de círculos que se intersectan

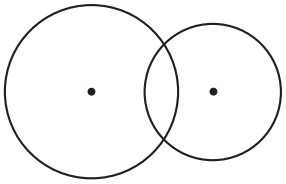
P

Para cada una de las figuras a) y b), dibuja los ejes de simetría.

a) Cuando los radios son iguales

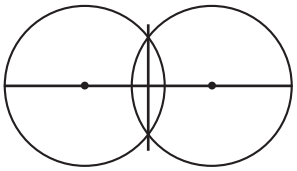


b) Cuando los radios son diferentes

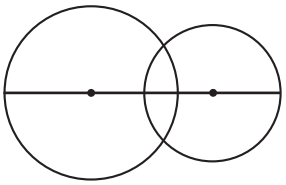


S

a) La recta que pasa por sus centros y la recta que pasa por sus intersecciones.



b) La recta que pasa por los centros.

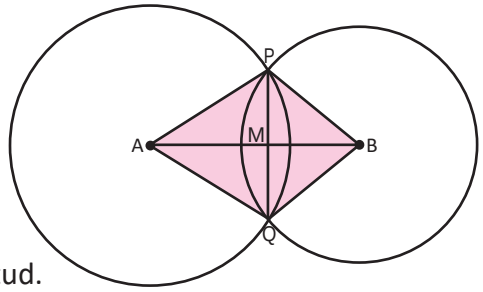


C

Dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ambos círculos. Además, cuando los radios de los dos círculos tienen la misma longitud, la figura de dos círculos, también, es simétrica por la línea que pasa por los dos puntos de intersección.

E

En la imagen se observan dos círculos intersectados con centros A y B. Se marcan los puntos de intersección de las circunferencias como P y Q, también se marca el punto de intersección de los segmentos AB y PQ como el punto M.



Con respecto al cuadrilátero AQBP:

a) Indica todas las parejas de segmentos que tengan la misma longitud.
b) ¿Qué ángulo tiene el mismo tamaño que el $\measuredangle PAB$?
c) ¿Qué relación hay entre $\overline{PQ}$ y $\overline{AB}$?

Solución.

Teniendo en cuenta el hecho de que la figura es simétrica por la recta que pasa por los centros de las circunferencias, se puede concluir:

a) $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$, $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$, $\overline{PM}$ y $\overline{QM}$
b) $\measuredangle QAB$
c) $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$

El segmento que une los puntos de intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que une sus centros y está dividido en dos partes iguales con esta recta.

1. En el problema anterior:
   a) ¿En qué caso sucederá que AM = MB? **Cuando los dos círculos tienen radios iguales**
   b) Si se cumple que AM = MB, ¿qué figura es el cuadrilátero AQBP? **Un rombo**

2. Construye en tu cuaderno un triángulo isósceles cuyos lados iguales tengan AB de longitud.



Un triángulo con dos lados iguales se llama isósceles.

(La construcción está en la página adicional.)

Ejercicio 1. En el problema anterior (dos circunferencias que se cortan en P y Q, con centros A y B y M la intersección de AB con PQ):

a) ¿En qué caso sucederá que AM = MB?

El punto M divide al segmento AB según los tamaños de las circunferencias: si la circunferencia de centro A es mayor, M queda más cerca de B. Solo cuando las dos circunferencias tienen radios iguales, la figura es simétrica respecto a la recta PQ y el punto M queda justo en el medio de AB.

Respuesta: **Cuando los dos círculos tienen radios iguales**

b) Si se cumple que AM = MB, ¿qué figura es el cuadrilátero AQBP?

Si AM = MB, los radios son iguales, así que AP = AQ = BP = BQ (todos son radios de la misma longitud). Además PM = QM y las diagonales AB y PQ se cortan perpendicularmente en sus puntos medios. Un cuadrilátero con los cuatro lados iguales es un rombo.

Respuesta: **Un rombo**

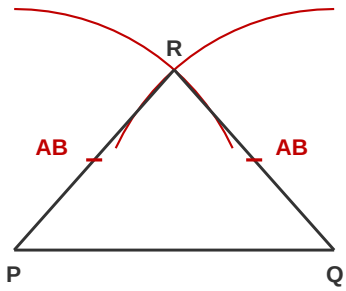
Ejercicio 2. Construye en tu cuaderno un triángulo isósceles cuyos lados iguales tengan AB de longitud (el segmento AB está dibujado bajo el enunciado)

El segmento AB impreso mide aproximadamente 3.2 cm.

Construcción: se toma con el compás la longitud del segmento AB impreso. Se traza una base cualquiera (por ejemplo, de 4 cm) con extremos, digamos, P y Q. Con centro en P y radio AB se traza un arco; con centro en Q y el mismo radio AB se traza otro arco; el punto donde se cortan los arcos es el tercer vértice R. El ΔPQR tiene PR = QR = AB, por lo que es isósceles. En la página adicional se muestra la construcción con los arcos.

Respuesta: **Triángulo isósceles con los lados iguales de la longitud de AB (construcción en la página adicional)**

Construcción del triángulo isósceles:



Arcos con radio AB trazados desde P y Q

2.3 Dibujo de figuras planas utilizando regla y compás

P

Las siguientes figuras desde a) hasta f) muestran los pasos para dibujar un hexágono; utilizando regla y compás, elabora uno siguiendo estos pasos y sin cambiar la abertura del compás.

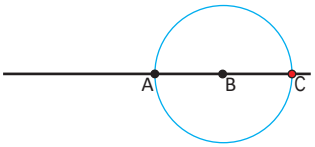
a)



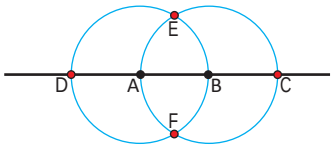
b)



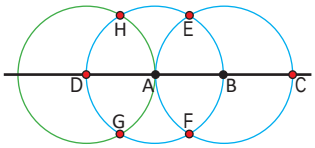
c)



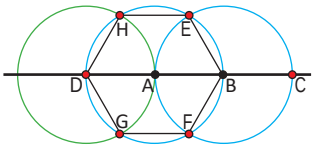
d)



e)

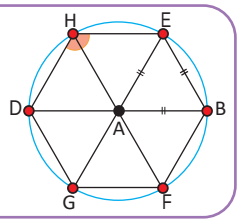


f)



S

Al dibujar un hexágono siguiendo los pasos anteriores, se forman seis triángulos, donde la longitud de todos los lados son iguales al radio de la circunferencia. Los triángulos son entonces equiláteros. También todos los ángulos internos de la figura son iguales a 120°. Por tanto, la figura es un hexágono.



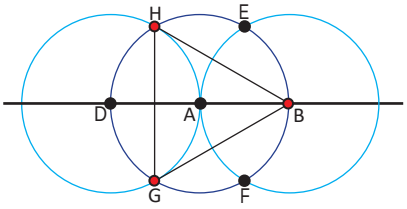
C

Se utilizó compás para dibujar círculos y arcos de circunferencias, así también, se pueden copiar las longitudes de segmentos.

E

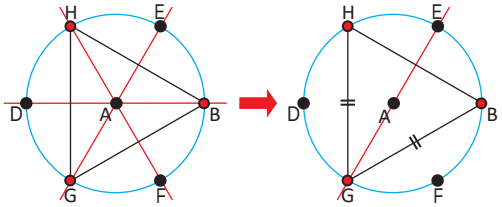
Siguiendo los mismos pasos de la construcción anterior se puede formar un triángulo, únicamente seleccionando tres puntos, como lo muestra la imagen.

a) Traza los ejes de simetría del triángulo que pasen por el punto A.
b) A partir de lo anterior, concluye por qué es posible formar un triángulo equilátero.



Solución.

Como $\sphericalangle GAH = 120° = \sphericalangle GAB$ (se puede concluir de la Solución porque los triángulos que se forman son equiláteros) y también $\overline{AH} = \overline{AB}$ (por ser radios); entonces, los puntos H y B son simetrías respecto al diámetro GE. Sucede lo mismo con los diámetros HF y BD. Para ver estas simetrías, es más fácil rotar el ΔGBH 120° respecto al punto A.



Cumpliéndose entonces, GH = GB = HB. Por tanto, es un triángulo equilátero.

Además $\sphericalangle HGB = \sphericalangle GBH = \sphericalangle BHG = 60°$.

Elabora un triángulo que tenga los lados AB, BC y CA con las longitudes que se muestran en el gráfico:



(El triángulo construido está en la página adicional.)

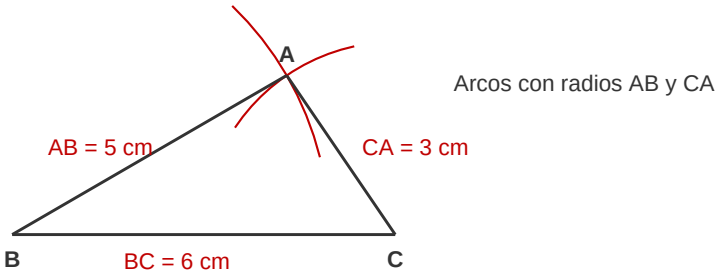
Elabora un triángulo que tenga los lados AB, BC y CA con las longitudes que se muestran en el gráfico

Los tres segmentos impresos miden, aproximadamente: AB = 5 cm, BC = 6 cm y CA = 3 cm.

Construcción (copiar longitudes con el compás, como indica la conclusión de la clase): se traza el lado mayor, BC = 6 cm, con extremos B y C. Con centro en B y radio igual al segmento AB (5 cm) se traza un arco; con centro en C y radio igual al segmento CA (3 cm) se traza otro arco. El punto donde se cortan los arcos es el vértice A. Al unir A con B y con C se obtiene el triángulo pedido. Se comprueba la desigualdad triangular: 5 + 3 = 8 > 6, por lo que el triángulo sí puede construirse. En la página adicional se muestra el triángulo construido con sus arcos.

Respuesta: El triángulo de lados AB = 5 cm, BC = 6 cm y CA = 3 cm (construido en la página adicional)

Construcción del triángulo:



2.4 Rectas perpendiculares

P

En tu cuaderno, utilizando únicamente regla y compás, traza una recta perpendicular a la recta l y que pase por el punto P.

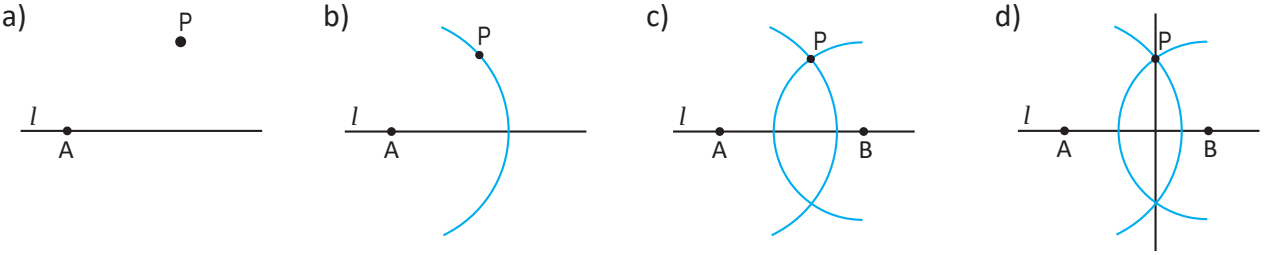
P

l

S

Se puede trazar una recta perpendicular desde un punto hacia una recta siguiendo los pasos que se detallan en la figura de abajo:

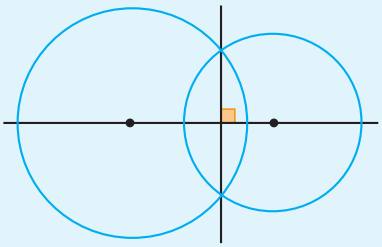
a) b) c) d)



C

Para trazar una línea perpendicular desde un punto a una recta, se utilizan características de círculos que se intersectan.

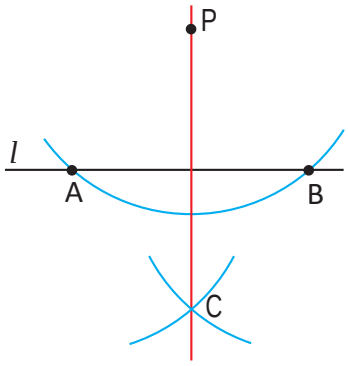
Recuerda que la recta que pasa por la intersección de dos circunferencias es perpendicular a la recta que une sus centros.



E

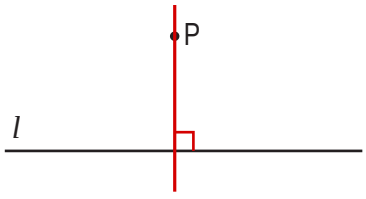
Otra forma de trazar rectas perpendiculares es:

1. Dibujar un punto P y una recta l como las del Problema inicial.
2. Dibujar una parte del círculo con centro en P y que cruce a la recta l. Se coloca A,B a los puntos donde se intersectan.
3. Dibujar dos círculos del mismo radio que tengan como centro A y B, respectivamente. Se coloca C en el punto donde se intersectan los dos círculos.
4. Trazar la recta PC.

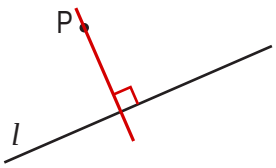


1. En cada uno de los siguientes literales traza la recta perpendicular desde el punto P hacia la recta l. Copia los segmentos en tu cuaderno.

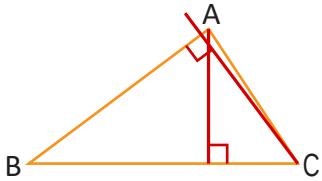
a)



b)



2. En el ΔABC traza una recta perpendicular:
   a) Desde el punto A hacia $\overline{BC}$.
   b) Desde el punto C hacia $\overline{AB}$.



Ejercicio 1. En cada uno de los siguientes literales traza la recta perpendicular desde el punto P hacia la recta l

a) La recta l es horizontal y el punto P está sobre ella (sin tocarla).

Se traza la perpendicular desde P hacia la recta horizontal l siguiendo los pasos de la clase: se traza un arco con centro en P que corte a la recta l en dos puntos; con centro en cada uno de esos puntos y el mismo radio se trazan dos arcos que se corten; la recta que une P con el punto de corte es la perpendicular buscada. La perpendicular trazada se muestra en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: **La recta perpendicular desde P a l (dibujada en la página del libro)**

b) La recta l es inclinada y el punto P está sobre ella (sin tocarla).

Se traza la perpendicular desde P hacia la recta inclinada l siguiendo los pasos de la clase: se traza un arco con centro en P que corte a la recta l en dos puntos; con centro en cada uno de esos puntos y el mismo radio se trazan dos arcos que se corten; la recta que une P con el punto de corte es la perpendicular buscada. La perpendicular trazada se muestra en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: **La recta perpendicular desde P a l (dibujada en la página del libro)**

Ejercicio 2. En el ΔABC traza una recta perpendicular:

a) Desde el punto A hacia BC.

El lado BC es horizontal. Desde A se traza la perpendicular a BC con la construcción de la clase (arcos con centro en A que corten a la recta BC y arcos del mismo radio desde esos cortes): resulta la recta vertical que baja de A hasta BC. Se muestra en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: **La perpendicular desde A hacia BC (dibujada en la página del libro)**

b) Desde el punto C hacia AB.

Desde C se traza la perpendicular a la recta AB con la construcción de la clase: el pie de la perpendicular queda sobre el segmento AB, muy cerca del vértice A. Se muestra en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: **La perpendicular desde C hacia AB (dibujada en la página del libro)**

2.5 Distancia entre un punto y una línea recta

P

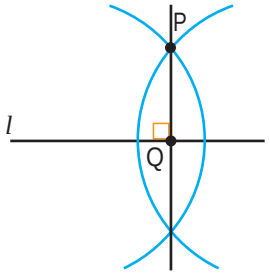
Se le llama **distancia entre un punto y una recta** a la longitud de la perpendicular del punto a la recta. Copia la ilustración en tu cuaderno y traza la distancia entre el punto P y la recta l.

P

l

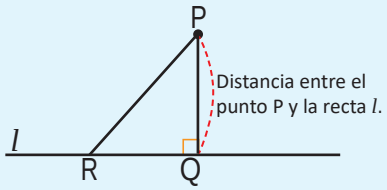
S

Al aplicar el procedimiento para trazar una perpendicular de un punto a una recta, visto en la clase anterior, se obtiene la distancia PQ entre el punto y la recta.

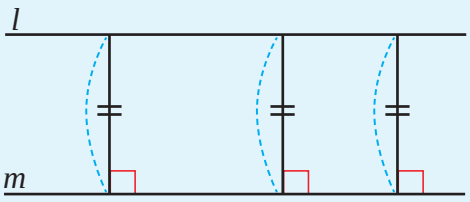


C

Si desde el punto P, que se ubica fuera de la recta l, se traza una perpendicular a la recta l y se establece como Q el punto de corte, a la longitud del segmento $\overline{PQ}$ se le llama: **distancia entre el punto P y la línea recta l**. La distancia es la menor de las longitudes del segmento que une el punto P y la recta l. Por ejemplo, en la ilustración PQ < PR.

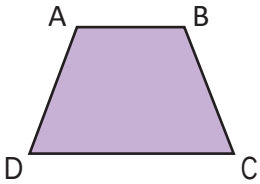


Si hay dos rectas paralelas l y m, para cualquier punto que se tome de la recta l la distancia con la recta m es constante.



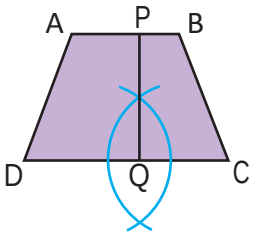
E

Para el trapecio ABCD traza la distancia entre la base mayor y la base menor.

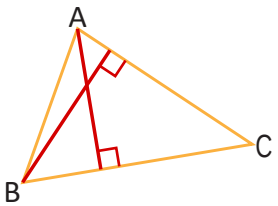


Solución.

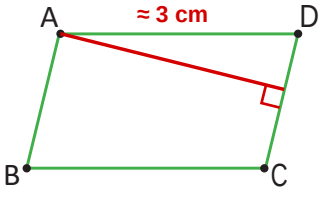
Como la base mayor y menor de un trapecio son paralelas, se puede tomar cualquier segmento perpendicular a las bases. PQ es la distancia.



1. En el triángulo ABC encuentra la distancia que hay:
   a) Entre A y $\overline{BC}$.
   b) Entre B y $\overline{AC}$.



2. En el paralelogramo ABCD, encuentra la medida de la distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.



Ejercicio 1. Determina la distancia que hay:

a) Del punto A a la recta que pasa por BC, en el ΔABC de la figura.

La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular desde el punto hasta la recta. Desde A se traza la perpendicular a la recta BC (con la construcción de la clase 2.4); el segmento trazado, marcado en rojo sobre la figura del libro, es la distancia pedida y se mide con la regla sobre la figura.

Respuesta: **El segmento perpendicular desde A hasta la recta BC (dibujado en la página del libro)**

b) Del punto B a la recta que pasa por AC, en el ΔABC de la figura.

Desde B se traza la perpendicular a la recta AC; el segmento trazado, marcado en rojo sobre la figura del libro, es la distancia del punto B a la recta AC y se mide con la regla sobre la figura.

Respuesta: **El segmento perpendicular desde B hasta la recta AC (dibujado en la página del libro)**

Ejercicio 2. En el paralelogramo ABCD de la figura, determina la distancia que hay entre las rectas que contienen a los segmentos AB y DC

Los lados AB y DC son paralelos (lados opuestos del paralelogramo).

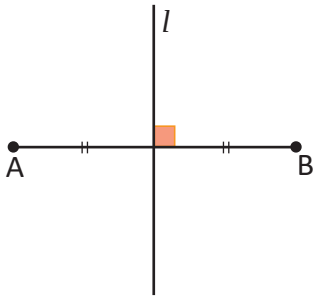
La distancia entre dos rectas paralelas es la longitud de cualquier segmento perpendicular a ambas. Desde el vértice A se traza la perpendicular a la recta DC; ese segmento, marcado en rojo sobre la figura del libro, mide aproximadamente 3 cm medidos sobre la figura impresa.

Respuesta: **Aproximadamente 3 cm (segmento perpendicular dibujado en la página del libro)**

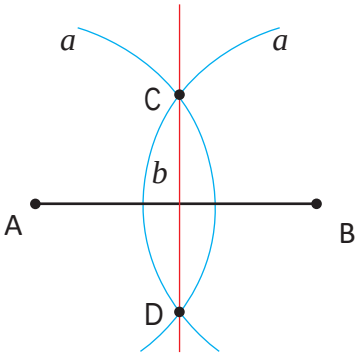
2.6 Mediatriz de un segmento

P

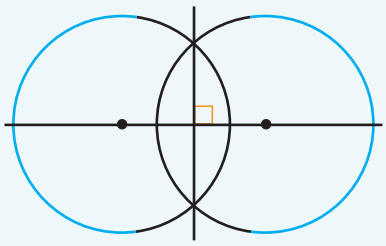
La recta que intersecta a un segmento formando un ángulo de 90° y lo divide en dos partes iguales se llama **mediatriz de un segmento**. Además, la mediatriz de $\overline{AB}$ es su eje de simetría y los puntos A y B son los puntos correspondientes. Así en el dibujo, la recta l es la mediatriz de $\overline{AB}$.



Se ha trazado la mediatriz de $\overline{AB}$, siguiendo los pasos a y b utilizando regla y compás. Explica esta forma de trazar la mediatriz.



Recuerda la forma en que se trazan rectas perpendiculares.



S

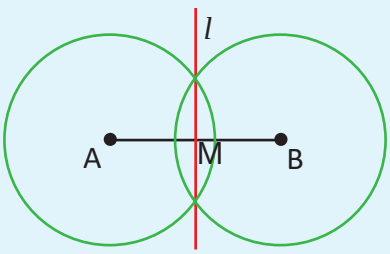
Para dibujar la mediatriz de $\overline{AB}$, se pueden dibujar dos círculos del mismo radio cuyos centros sean los puntos A y B, establecer las intersecciones de los círculos como C y D; luego, trazando la recta que pasa por CD, se obtiene la mediatriz del segmento.

Se debe recordar que dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ellos. Además, cuando los radios de los dos círculos tienen la misma longitud, la figura de dos círculos también es simétrica, por la línea que pasa por los dos puntos de intersección.

C

Considerando el procedimiento anterior de trazar la mediatriz, se pueden hacer las siguientes conclusiones.

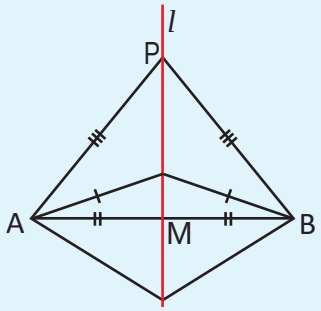
a) Dado que los círculos poseen el mismo radio, la recta l es un eje de simetría. Además, $l \perp \overline{AB}$.
b) El punto B puede sobreponerse perfectamente sobre el punto A, luego AM = BM.



Si se establece un punto P sobre la mediatriz de $\overline{AB}$ y se dobla el dibujo por la recta l, entonces $\overline{PA}$ se sobrepone en $\overline{PB}$.

Por tanto, PA = PB.

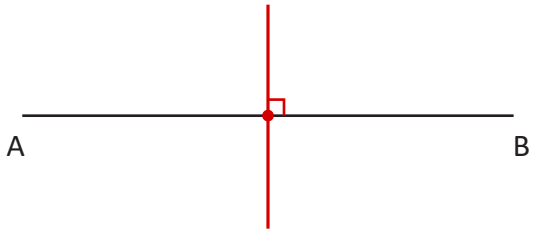
Además, todo punto ubicado en la mediatriz de un segmento equidista de los puntos A y B.



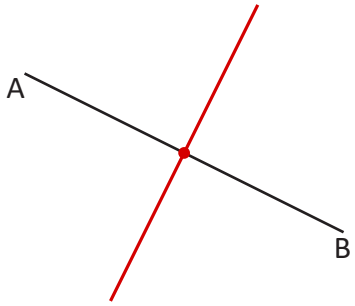
El término equidista es equivalente a decir "está a la misma distancia".

1. Dibuja la mediatriz del segmento AB.

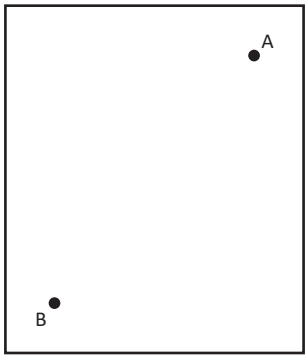
a)



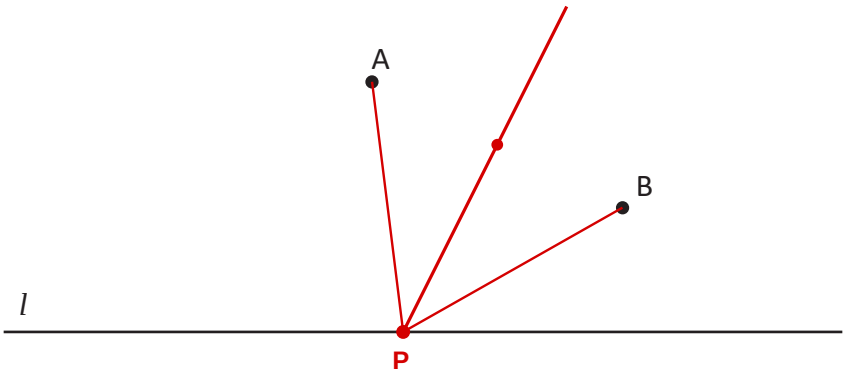
b)



En una página escribe los puntos A y B, traza el segmento AB y dobla la figura, de forma que los puntos A y B se sobrepongan exactamente. Dibuja la recta que se forma en la línea de doblez y marca como M el punto de intersección de las rectas y observa que se forma un ángulo recto; en la intersección de las dos rectas y los segmentos MA y BM miden igual.



2. Encuentra en el dibujo el punto sobre la recta l que tenga la misma distancia desde el punto A y desde el punto B.



Ejercicio 1. Dibuja la mediatriz del segmento AB

a) El segmento AB es horizontal.

Construcción de la clase: con centro en A y un radio mayor que la mitad de AB se traza un arco; con centro en B y el mismo radio se traza otro arco; los dos arcos se cortan en dos puntos y la recta que los une es la mediatriz: pasa por el punto medio de AB y es perpendicular a AB. Para el segmento horizontal resulta una recta vertical por su punto medio, dibujada en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: **La mediatriz de AB (dibujada en la página del libro)**

b) El segmento AB es inclinado.

Se aplica la misma construcción: dos arcos del mismo radio con centros en A y en B se cortan en dos puntos, y la recta que los une es la mediatriz de AB, perpendicular a AB por su punto medio. Se muestra en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: **La mediatriz de AB (dibujada en la página del libro)**

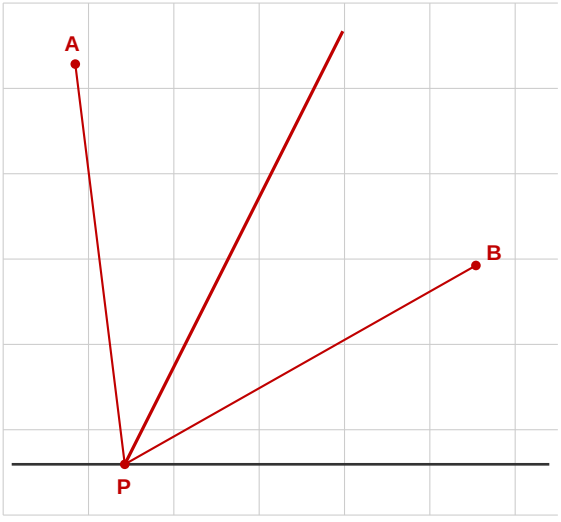
Ejercicio 2. Encuentra en el dibujo el punto sobre la recta l que tenga la misma distancia desde el punto A y desde el punto B

En la figura están los puntos A y B sobre la recta horizontal l.

Todo punto de la mediatriz de AB equidista de A y de B. Se construye la mediatriz de AB (arcos del mismo radio con centros en A y en B) y se marca su intersección con la recta l: ese punto P cumple PA = PB. Se muestra en rojo sobre la figura del libro, con los segmentos PA y PB.

Respuesta: **El punto P donde la mediatriz de AB corta a la recta l (marcado en la página del libro)**

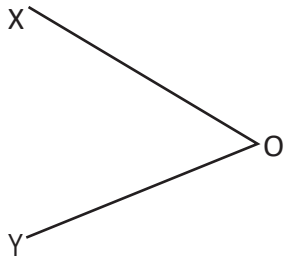
Construcción del punto P (la mediatriz de AB corta a l en P):



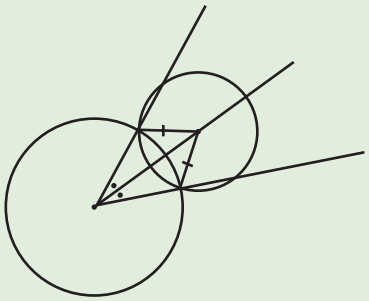
2.7 Bisectriz de un ángulo

P

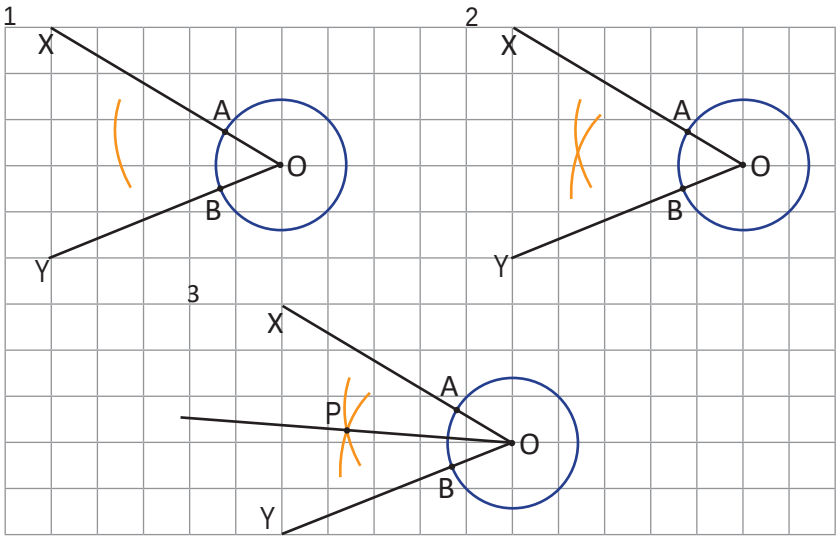
Para ∢XOY construye una semirrecta al interior del ángulo utilizando regla y compás, de tal manera que la semirecta divida al ángulo en dos ángulos iguales.



Dos círculos que se intersectan son simétricos respecto a la recta o eje que pasa por los centros de ambos círculos.



S



El compás se utiliza para trasladar distancias.

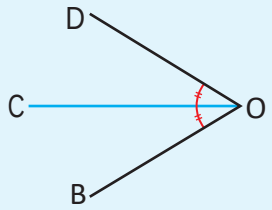
Paso 1. Trazar una circunferencia con centro en O y radio cualquiera, y marcar las intersecciones a los lados del ángulo con A y B.
Luego, con centro en A y radio cualquiera trazar un arco.

Paso 2. Con el mismo radio con que se trazó el arco en el paso 1, trazar un arco con centro en B.

Paso 3. Representar con P la intersección de ambos arcos. El punto P también es el centro de la otra circunferencia mencionada en el recordatorio (recuadro verde).

C

La semirecta que divide un ángulo en dos partes iguales se llama **bisectriz**. También se puede decir que la bisectriz es el eje de simetría de ese ángulo.



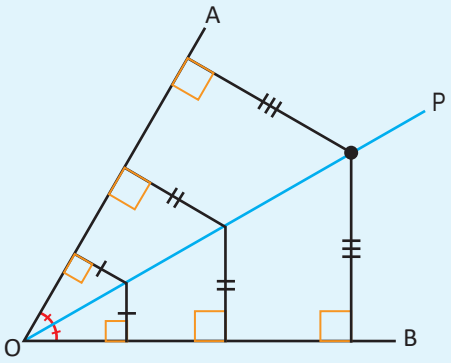
Por tanto, $\measuredangle DOC = \measuredangle COB = \frac{1}{2} \measuredangle DOB$.

Los pasos para construir la bisectriz de un ángulo son:

1. Dibujar un círculo que tenga como centro el punto O. Establecer como A y B las intersecciones con los lados del ángulo y la circunferencia.
2. Dibujar dos arcos del mismo radio, tomando como sus centros A y B. Y a la intersección de las dos circunferencias nombrarlas con P.
3. Trazar la semirecta OP.

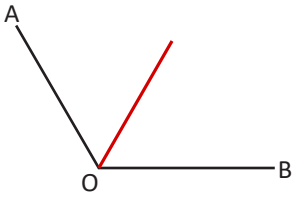
Dado que la bisectriz de ∢AOB es su eje de simetría, las distancias trazadas desde el punto P sobre la bisectriz a los lados del ángulo son iguales.

En general, todo punto ubicado sobre la bisectriz de un ángulo tiene igual distancia hacia los lados del ángulo. Así como se muestra en la imagen:

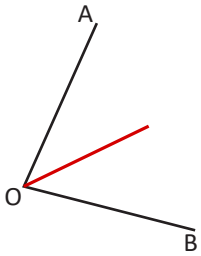


1. Encuentra la bisectriz del ángulo AOB en cada literal.

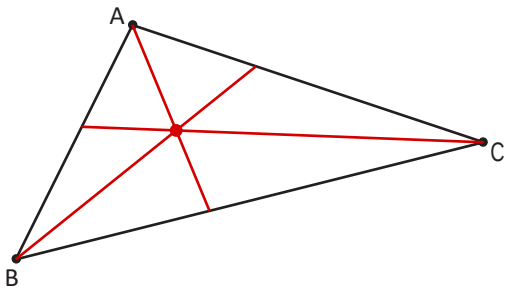
a)



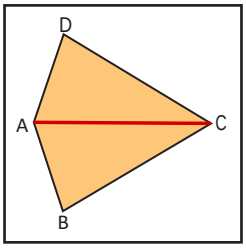
b)



2. Traza las bisectrices de los ángulos del ΔABC.



3. En la figura:
   a) Dobla de tal forma que los lados $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ del cuadrilátero se sobrepongan.
   b) Marca con un lápiz la recta que forma el doblez.
   c) ¿Qué relación tienen los dos ángulos que se formaron con el doblez?



Ejercicio 1. Encuentra la bisectriz del ángulo AOB en cada literal

a) El ángulo AOB tiene un lado horizontal (OB) y el otro inclinado hacia arriba a la izquierda (OA).

Se construye la bisectriz del ∢AOB siguiendo los pasos de la clase: se traza un círculo con centro en el vértice que corte a los dos lados del ángulo; con centro en esos dos cortes y el mismo radio se trazan dos arcos que se corten en un punto interior; la semirrecta que une el vértice con ese punto es la bisectriz. La bisectriz trazada se muestra en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: La bisectriz del ∢AOB (dibujada en la página del libro)

b) El ángulo AOB tiene los dos lados inclinados.

Se construye la bisectriz del ∢AOB siguiendo los pasos de la clase: se traza un círculo con centro en el vértice que corte a los dos lados del ángulo; con centro en esos dos cortes y el mismo radio se trazan dos arcos que se corten en un punto interior; la semirrecta que une el vértice con ese punto es la bisectriz. La bisectriz trazada se muestra en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: La bisectriz del ∢AOB (dibujada en la página del libro)

Ejercicio 2. Traza las bisectrices de los ángulos del ΔABC

El triángulo de la figura tiene vértices A (arriba), B (abajo a la izquierda) y C (a la derecha).

Se construye la bisectriz de cada ángulo del triángulo con los pasos de la clase. Las tres bisectrices se cortan en un mismo punto interior del triángulo. Se muestran en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: Las tres bisectrices del ΔABC, concurrentes en un punto interior (dibujadas en la página del libro)

Ejercicio 3. En la figura (el cuadrilátero ABCD):

a) Dobla de tal forma que los lados BC y DC del cuadrilátero se sobrepongan.

Los lados BC y DC tienen la misma longitud y comparten el vértice C. Para que BC caiga exactamente sobre DC, el doblez debe pasar por C y por el vértice opuesto A: se dobla por la diagonal AC del cuadrilátero (al hacerlo, también el lado AB cae sobre el lado AD).

Respuesta: El doblez se hace por la diagonal AC

b) Marca con un lápiz la recta que forma el doblez.

La recta del doblez es la recta que pasa por A y por C, es decir, la diagonal AC del cuadrilátero. Se marca en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: La recta AC (marcada en la página del libro)

c) ¿Qué relación tienen los dos ángulos que se formaron con el doblez?

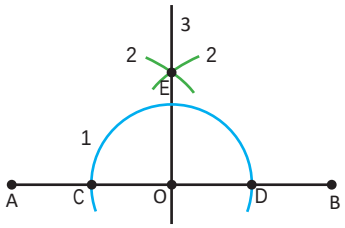
Al sobreponerse los lados BC y DC, el ángulo que forma el doblez con BC coincide con el que forma con DC: los dos ángulos formados (∢BCA y ∢DCA) son iguales. Por eso la recta del doblez es la bisectriz del ángulo C del cuadrilátero.

Respuesta: Los dos ángulos formados son iguales (el doblez es la bisectriz del ∢BCD)

2.8 Tangente a una circunferencia

P

La imagen muestra cómo se puede trazar una recta perpendicular a la recta AB pasando por el punto O.



a) Explica los pasos utilizados para trazar la recta que pasa por OE.
b) Explica la razón por la que la recta que pasa por OE es perpendicular a $\overline{AB}$.

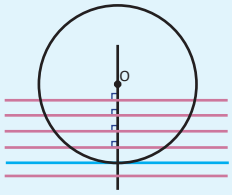
S

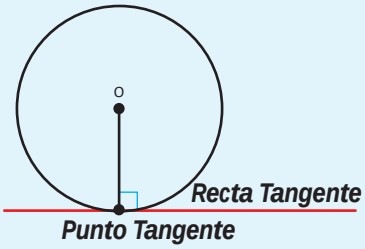
a) Se observan tres pasos:
1. Dibujar un círculo con centro en O y establecer los puntos C y D.
2. Dibujar dos círculos con el mismo radio y que tengan como centros los puntos C y D, luego marcar sus intersecciones como E.
3. Trazar la recta que pasa por EO.

b) Si se considera $\overline{AB}$ como un ángulo de 180°, la recta que pasa por OE es bisectriz del ángulo. Por tanto, $\measuredangle AOE = 90°$.

C

Al mover la línea perpendicular a la recta, que pasa por el centro del círculo O, hay un momento en el que la recta tiene solo un punto común con la circunferencia.

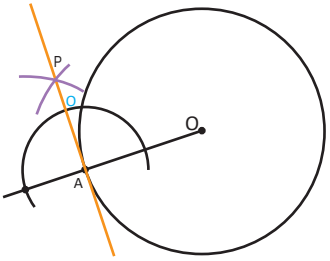




En ese momento, se dice que esa recta es tangencial al círculo, y a esta línea se le llama **recta tangente** al círculo y el único punto que la recta tiene en común con la circunferencia se le llama **punto de tangencia** y es perpendicular al radio.

E

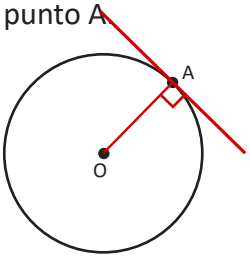
En la imagen se ha trazado la recta tangente a la circunferencia cuyo punto de tangencia es A.



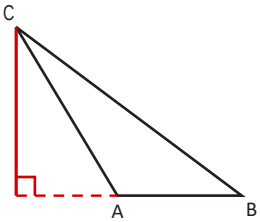
a) Explica los pasos utilizados para trazar la recta tangente.
b) Dibuja en tu cuaderno la recta tangente siguiendo los pasos.

Solución.
Se traza una circunferencia tomando como centro el punto A. Se dibujan dos arcos del mismo radio con sus centros en las intersecciones de la circunferencia, con la recta que pasa por OA. Se marca como P el punto de intersección entre los dos arcos. Se traza la recta AP, esta es la tangente al punto A.

1. Encuentra la recta tangente a la circunferencia en el punto A.



2. Traza la altura del ΔABC desde el punto C y tomando como base el segmento AB.



Ejercicio 1. Encuentra la recta tangente a la circunferencia en el punto A

En la figura, A es un punto de la circunferencia con centro O, arriba a la derecha.

La tangente en A es la recta perpendicular al radio OA en el punto A. Se traza el radio OA y, con la construcción de la perpendicular por un punto (clase 2.4), se traza por A la recta perpendicular a OA: esa recta toca a la circunferencia solo en A, es decir, es la tangente. Se muestra en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: **La recta perpendicular a OA en A (dibujada en la página del libro)**

Ejercicio 2. Traza la altura del ΔABC desde el punto C y tomando como base el segmento AB

En la figura, A y B están en la parte inferior y C arriba a la izquierda.

La altura desde C es el segmento perpendicular desde C hasta la recta que contiene a la base AB. Como el pie de esa perpendicular cae fuera del segmento AB (a su izquierda), se prolonga la recta AB y se traza el segmento desde C hasta el pie, con la marca de ángulo recto. Se muestra en rojo sobre la figura del libro.

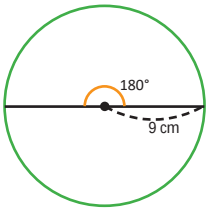
Respuesta: **La altura desde C, con el pie sobre la prolongación de AB (dibujada en la página del libro)**

2.9 Longitud de arco de un sector circular

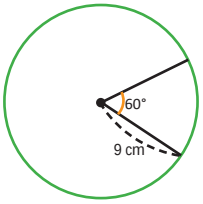
P

La longitud de la circunferencia cuyo radio es de 9 cm, se puede calcular de la siguiente forma: $l = 2\pi \times 9 = 18\pi$. Pensando en la misma circunferencia, y aplicando regla de tres simple directa, resuelve los siguientes numerales.

1. Calcula la longitud del arco sostenido por un ángulo de 180°.



2. Calcula la longitud del arco sostenido por un ángulo de 60°.



La longitud de la circunferencia se calcula como: $l = 2\pi r$.

Donde r es el radio del círculo y $\pi = 3.14159...$

S

Como la circunferencia tiene 360° se puede plantear la siguiente regla de tres simple directa, para realizar lo que se pide en cada uno de los literales.

1.

Longitud	l	18π
Ángulo	180°	360°

$l : 180 = 18\pi : 360$

$360l = 18\pi \times 180$

$l = 18\pi \times \frac{180}{360}$

$l = 18\pi \times \frac{\cancel{180}^{1}}{\cancel{360}_{2}}$

$l = 18\pi \times \frac{1}{2}$

$l = 9\pi$

2.

Longitud	l	18π
Ángulo	60°	360°

$l : 60 = 18\pi : 360$

$360l = 18\pi \times 60$

$l = 18\pi \times \frac{60}{360}$

$l = 18\pi \times \frac{\cancel{60}^{1}}{\cancel{360}_{6}}$

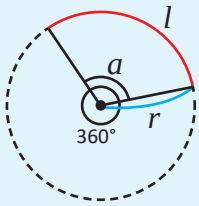
$l = 18\pi \times \frac{1}{6}$

$l = 3\pi$

C

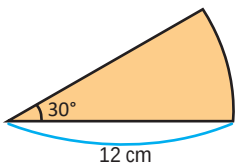
Para encontrar la longitud de arco sostenido por un ángulo a, se debe multiplicar la razón entre los ángulos por la longitud de la circunferencia.

Longitud de arco de una circunferencia: $l = 2\pi r \times \frac{a}{360}$.



E

Calcula la longitud de un arco sostenido por un ángulo de 30° y un radio de 12 cm.



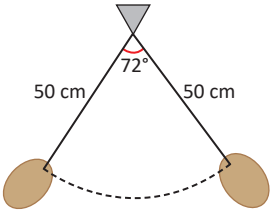
Solución.

En el problema: $a = 30°$ y $r = 12$.

La longitud del arco es: $l = 2\pi \times 12 \times \frac{30}{360} = 2\pi \times 12 \times \frac{1}{12} = 2\pi$.

1. Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 45° y un radio de 4 cm. **π cm**

2. El péndulo de un reloj mide 50 cm al balancearse forma un ángulo de 72°. ¿Cuánto mide el arco que describe el péndulo? **20π cm**



Ejercicio 1. Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de 45° y un radio de 4 cm

Se usa la fórmula de la clase: $l = 2\pi r \times a/360$.

$l = 2\pi(4) \times 45/360 = 8\pi \times 1/8 = \pi$. La longitud del arco es π cm.

Respuesta: π cm

Ejercicio 2. El péndulo de un reloj mide 50 cm al balancearse forma un ángulo de 72°. ¿Cuánto mide el arco que describe el péndulo?

El péndulo es el radio (r = 50 cm) y el arco es el que sostiene el ángulo de 72°.

$l = 2\pi(50) \times 72/360 = 100\pi \times 1/5 = 20\pi$. El arco que describe el péndulo mide 20π cm.

Respuesta: 20π cm

2.10 Área de un sector circular

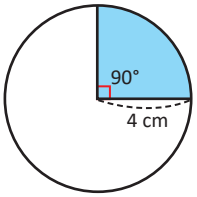
P

El área de un círculo cuyo radio es 4 cm se puede calcular de la siguiente forma:

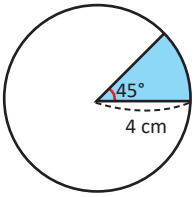
$$A = \pi \times 4 \times 4 = 4^2\pi = 16\pi$$

Pensando en un círculo del mismo radio, realiza los siguientes numerales:

1. Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 90°.



2. Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 45°.



El área del círculo se calcula como: $\mathbf{A = \pi \times r^2}$. Donde r es el radio del círculo y $\boldsymbol{\pi}$ **= 3.14159**...

S

Como la circunferencia tiene 360° se puede plantear la siguiente regla de tres simple directa, para realizar lo que se pide en cada uno de los literales.

1.

Área	S	16π
Ángulo	90°	360°

$S : 90 = 16\pi : 360$

$360S = 16\pi \times 90$

$S = 16\pi \times \frac{90}{360}$

$S = 16\pi \times \frac{1}{4}$

$S = 4\pi$

2.

Área	S	16π
Ángulo	45°	360°

$S : 45 = 16\pi : 360$

$360S = 16\pi \times 45$

$S = 16\pi \times \frac{45}{360}$

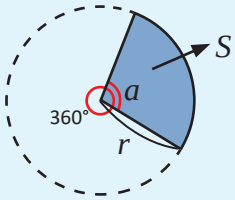
$S = 16\pi \times \frac{1}{8}$

$S = 2\pi$

C

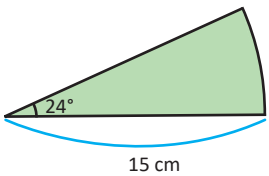
Para encontrar el área de un sector circular, se debe multiplicar la razón entre los ángulos por el área del círculo.

Área del sector circular: $S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$



E

Calcula el área del sector circular determinado por un ángulo de 24° y un radio de 15 cm.



Solución.

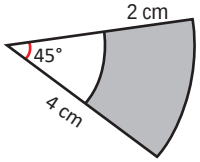
Datos del problema: $a = 24°$ y $r = 15$

El área del sector circular es: $S = \pi \times 15^2 \times \frac{24}{360} = \pi \times 15^2 \times \frac{1}{15} = 15\,\pi$

1. Encuentra el área del sector circular correspondiente a un ángulo central de 120° y un radio de 9 cm.

27π cm²

2. Encuentra el área del sector sombreado en la siguiente figura:



3π/2 cm²

Ejercicio 1. Calcula el área del sector circular que se muestra en la figura (ángulo de 120° y radio de 9 cm)

Se usa la fórmula de la clase: $S = \pi r^2 \times a/360$.

$S = \pi(9^2) \times 120/360 = 81\pi \times 1/3 = 27\pi$. El área del sector es 27π cm².

Respuesta: **27π cm²**

Ejercicio 2. Calcula el área sombreada de la figura (un sector de corona circular con ángulo de 45°, radio mayor de 4 cm y radio menor de 2 cm)

El área sombreada es la diferencia entre el sector de radio 4 cm y el sector de radio 2 cm, ambos con ángulo de 45°.

Sector mayor: $\pi(4^2) \times 45/360 = 16\pi/8 = 2\pi$. Sector menor: $\pi(2^2) \times 45/360 = 4\pi/8 = \pi/2$. Área sombreada: $2\pi - \pi/2 = 3\pi/2$. El área sombreada es $3\pi/2$ cm².

Respuesta: **$3\pi/2$ cm²**

2.11 Incentro de un triángulo

P

En la imagen 1, el punto P dista lo mismo de los lados del triángulo. En la imagen 2, encuentra el punto P que dista lo mismo de los lados del triángulo y comprueba, que ese punto, es el centro de la circunferencia que es tangente a los tres lados del triángulo.

Imagen 1

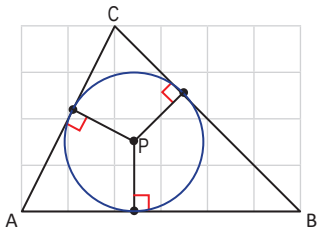
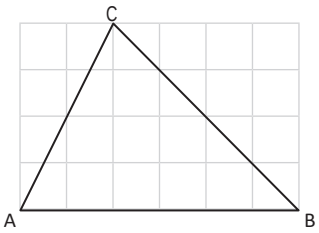


Imagen 2

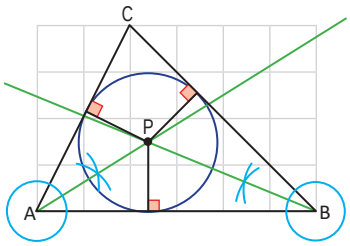


Utiliza la propiedad que indica que todo punto ubicado sobre la bisectriz de un ángulo tiene igual distancia hacia los lados del ángulo.

S

Se traza la bisectriz del ángulo ABC, también se traza la bisectriz del ángulo CAB, sea P la intersección de las dos bisectrices.

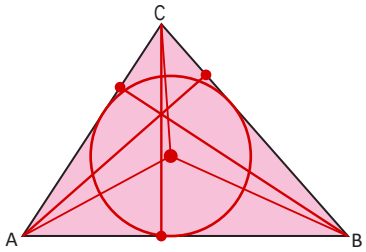
Este punto P cumple que está a igual distancia de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ por estar sobre la bisectriz del ∢ABC, también cumple estar a igual distancia de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ por estar sobre la bisectriz del ∢CAB. Por tanto, P está a igual distancia de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. El punto P también está sobre la bisectriz de ∢BCA por estar a igual distancia de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

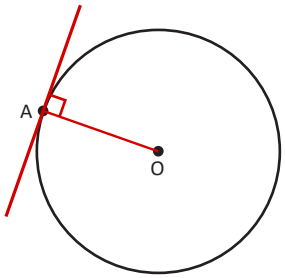


C

En el problema desarrollado, el punto P se llama **incentro del triángulo**, cumple con ser la intersección de las tres bisectrices de un triángulo y es el centro de una circunferencia que está al interior del triángulo y es tangente a sus tres lados.

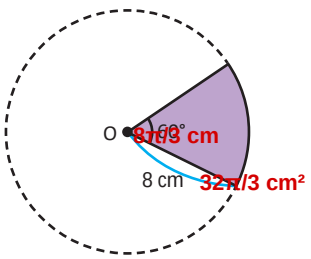
1. En el ΔABC, considerando AB = 4 cm, BC = 3.5 cm y AC = 3 cm. En tu cuaderno traza las rectas perpendiculares desde:
   a) El punto A hacia el segmento $\overline{BC}$.
   b) El punto B hacia el segmento $\overline{AC}$.
   c) El punto C hacia el segmento $\overline{AB}$.
   d) Determina en incentro de ΔABC.





2. Encuentra la recta tangente a la circunferencia, en el punto A, utilizando compás y una regla.

3. Dado un sector circular de radio 8 cm y ángulo de 60°:
   a) Calcula la longitud de su arco.
   b) Calcula el área del sector circular.



Unidad 8

Ejercicio 1. En tu cuaderno traza el ΔABC cuyos lados son AB = 4 cm, BC = 3.5 cm y AC = 3 cm; luego, realiza lo que se pide en cada literal (la figura impresa del triángulo guarda la misma proporción)

a) El pie de la altura que parte del vértice A.

Se construye el triángulo con regla y compás copiando las longitudes (clase 2.3). La altura desde A es la perpendicular desde A hasta la recta BC; su pie es el punto donde esa perpendicular toca a BC. En la página adicional se muestra el triángulo construido con la altura y su pie marcados; la altura también se dibuja en rojo sobre el triángulo impreso.

Respuesta: El pie de la altura desde A sobre BC (dibujado en la página adicional y sobre la figura del libro)

b) El pie de la altura que parte del vértice B.

La altura desde B es la perpendicular desde B hasta la recta AC; su pie es el punto donde toca a AC, que queda sobre el segmento. Se muestra en la página adicional y en rojo sobre el triángulo impreso.

Respuesta: El pie de la altura desde B sobre AC (dibujado en la página adicional y sobre la figura del libro)

c) El pie de la altura que parte del vértice C.

La altura desde C es la perpendicular desde C hasta la recta AB; como AB es la base horizontal, la altura es el segmento vertical desde C hasta AB. Se muestra en la página adicional y en rojo sobre el triángulo impreso.

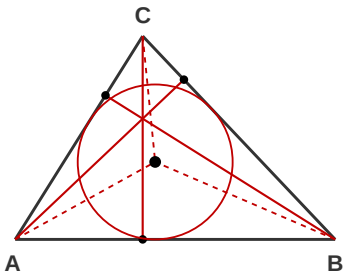
Respuesta: El pie de la altura desde C sobre AB (dibujado en la página adicional y sobre la figura del libro)

d) Encuentra el incentro del ΔABC y traza la circunferencia inscrita en él.

El incentro es el punto donde se cortan las bisectrices de los tres ángulos (clase 2.7). Se trazan las tres bisectrices; desde el punto de corte se baja la perpendicular a uno de los lados y esa distancia es el radio de la circunferencia inscrita, que se traza con el compás tocando los tres lados. Se muestra en la página adicional y en rojo sobre el triángulo impreso.

Respuesta: El incentro y la circunferencia inscrita (dibujados en la página adicional y sobre la figura del libro)

El ΔABC construido (4, 3.5 y 3 cm) con sus alturas e incentro:



Incentro y circunferencia inscrita; en rojo, las alturas

Ejercicio 2. Traza la recta tangente a la circunferencia en el punto A

En la figura, A es un punto de la circunferencia con centro O, a la izquierda.

Se traza el radio OA y por A la recta perpendicular a OA (construcción de la clase 2.4): esa recta es la tangente, porque la tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia. Se muestra en rojo sobre la figura del libro.

Respuesta: La recta perpendicular a OA en A (dibujada en la página del libro)

Ejercicio 3. En un sector circular de radio 8 cm y ángulo central de 60°, determina:

a) La longitud de su arco.

$l = 2\pi(8) \times 60/360 = 16\pi \times 1/6 = 8\pi/3$. La longitud del arco es $8\pi/3$ cm.

Respuesta: $8\pi/3$ cm

b) El área del sector circular.

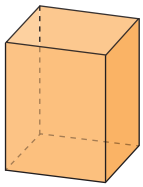
$S = \pi(8^2) \times 60/360 = 64\pi \times 1/6 = 32\pi/3$. El área del sector es $32\pi/3$ cm².

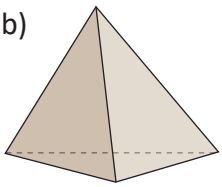
Respuesta: $32\pi/3$ cm²

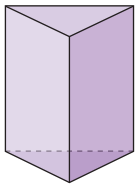
3.1 Clasificación de cuerpos geométricos

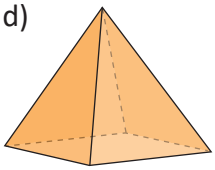
P

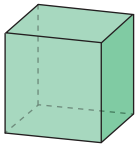
En los cuerpos geométricos se entiende como **cara** tanto las caras laterales como las bases. En las figuras del literal a) hasta el literal h) se observan algunos cuerpos geométricos.

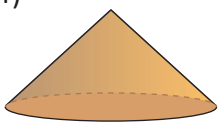
a) 

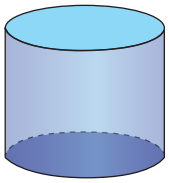
b) 

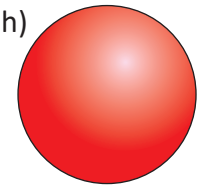
c) 

d) 

e) 

f) 

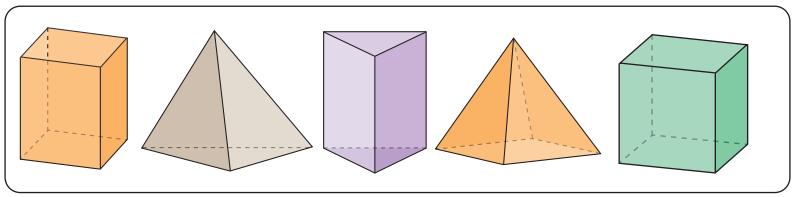
g) 

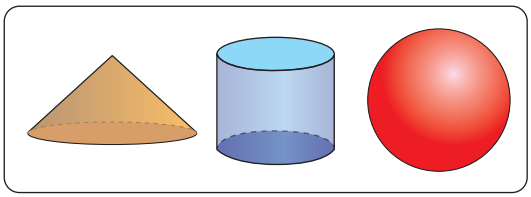
h) 

Clasifica los cuerpos geométricos según las similitudes de sus caras.

S

Se hace la siguiente clasificación de las figuras desde a) hasta h).

1. 

2. 

C

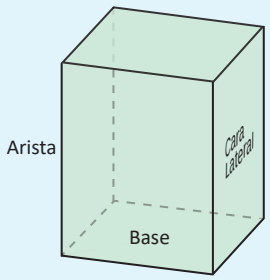
Las figuras de a) hasta d) del grupo 1 son llamadas **poliedros**, la característica de estos cuerpos es que sus caras son figuras planas, por lo general polígonos, como rectángulos o triángulos.

La palabra **poliedro** viene de las raíces griegas: πολύς (polys), "muchas" y de έδρα (edra), "base", "caras".

Dentro de estas, las figuras como a) y c) cuyas caras laterales son rectángulos, son llamadas **prismas**. Las figuras como b) y d), cuyas caras laterales son triángulos, reciben el nombre especial de **pirámides**. Si además, el prisma tiene todos sus lados iguales, se le llama **cubo**.

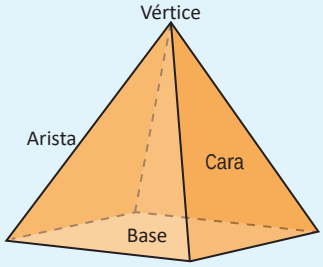
Las figuras desde f) hasta h) cuyas caras laterales son curvas, reciben el nombre de **cuerpos redondos**. En las imágenes de abajo se pueden observar los elementos de algunos cuerpos geométricos, a) es un prisma cuadrangular, b) es una pirámide de base rectangular, c) es un cilindro y d) es un cono.

a)



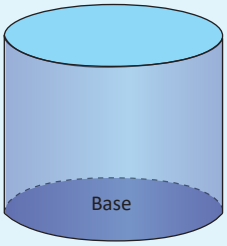
Prisma rectangular

b)



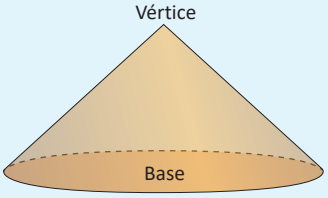
Pirámide rectangular

c)



Cilindro

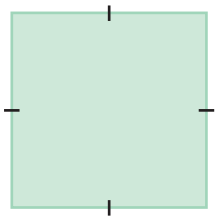
d)



Cono

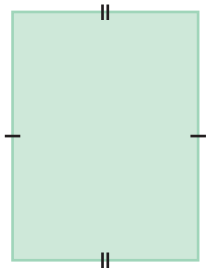
De la imagen anterior, se pueden obtener las figuras planas que conforman la base y las caras laterales del prisma y la pirámide, se resume a continuación.

Base del prisma mostrado en el literal a).



Cuadrado

Cara lateral del prisma mostrado en el literal a).



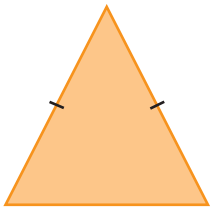
Rectángulo

Base de la pirámide mostrada en el literal b).



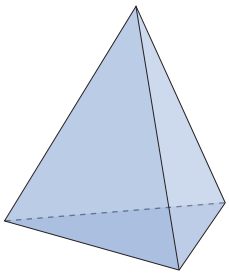
Rectángulo

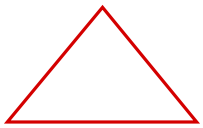
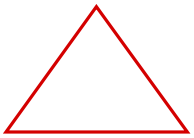
Cara lateral de la pirámide mostrada en el literal b).

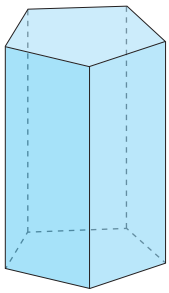


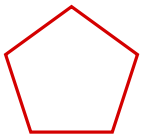
Triángulo isósceles

1. Al igual que en el ejemplo anterior, dibuja las figuras planas que conforman el siguiente prisma y pirámide.

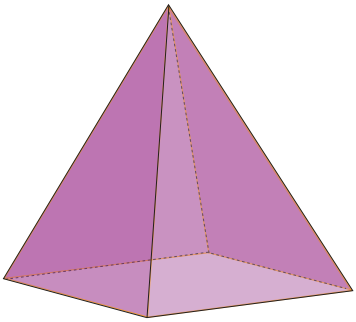


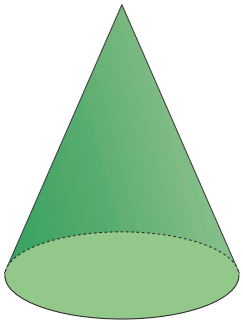
Base de la pirámide	Cara lateral de la pirámide
 Triángulo	 Triángulo

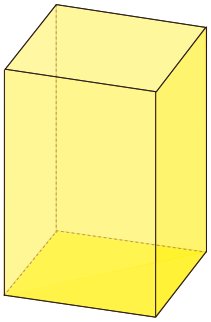


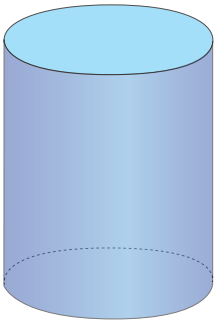
Base del prisma	Cara lateral del prisma
 Pentágono	 Rectángulo

2. Observando los elementos de las imágenes presentadas:
   a) Menciona las diferencias entre pirámide y cono. **La pirámide es un poliedro; el cono es un cuerpo redondo**
   b) Menciona las diferencias entre prisma y cilindro. **El prisma es un poliedro; el cilindro es un cuerpo redondo**









Ejercicio 1. Al igual que en el ejemplo anterior, dibuja las figuras planas que conforman el siguiente prisma y pirámide

La pirámide mostrada (de base triangular).

La pirámide tiene una sola base, que es un triángulo, y sus caras laterales también son triángulos que se unen en el vértice superior. En las casillas de la página del libro se dibujan en rojo un triángulo para la base y un triángulo para la cara lateral.

Respuesta: **Base: un triángulo; cara lateral: un triángulo (dibujados en las casillas del libro)**

El prisma mostrado (de base pentagonal).

El prisma tiene dos bases que son pentágonos (se cuentan cinco vértices en la cara superior de la figura) y sus caras laterales son rectángulos. En las casillas de la página del libro se dibujan en rojo un pentágono para la base y un rectángulo para la cara lateral.

Respuesta: **Base: un pentágono; cara lateral: un rectángulo (dibujados en las casillas del libro)**

Ejercicio 2. Observando los elementos de las imágenes presentadas:

a) Menciona las diferencias entre pirámide y cono.

La pirámide es un poliedro: su base es un polígono y sus caras laterales son triángulos planos que terminan en un vértice. El cono es un cuerpo redondo: su base es un círculo y su superficie lateral es curva, sin caras planas ni aristas. En resumen, se diferencian en la forma de la base (polígono o círculo) y en que las caras laterales de la pirámide son planas y triangulares, mientras que la superficie lateral del cono es curva.

Respuesta: **La pirámide es un poliedro de base poligonal y caras laterales triangulares planas; el cono es un cuerpo redondo de base circular y superficie lateral curva**

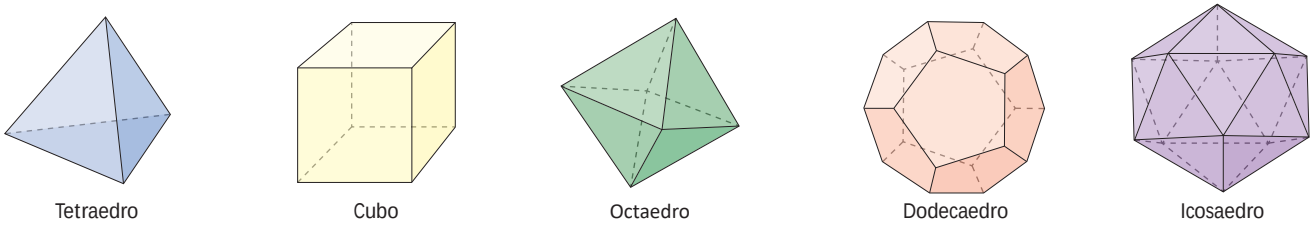
b) Menciona las diferencias entre prisma y cilindro.

El prisma es un poliedro: tiene dos bases poligonales congruentes y sus caras laterales son rectángulos planos. El cilindro es un cuerpo redondo: tiene dos bases circulares y su superficie lateral es curva. Se diferencian en la forma de las bases (polígonos o círculos) y en que las caras laterales del prisma son planas, mientras que la superficie lateral del cilindro es curva.

Respuesta: **El prisma es un poliedro de bases poligonales y caras laterales rectangulares planas; el cilindro es un cuerpo redondo de bases circulares y superficie lateral curva**

3.2 Características de poliedros regulares

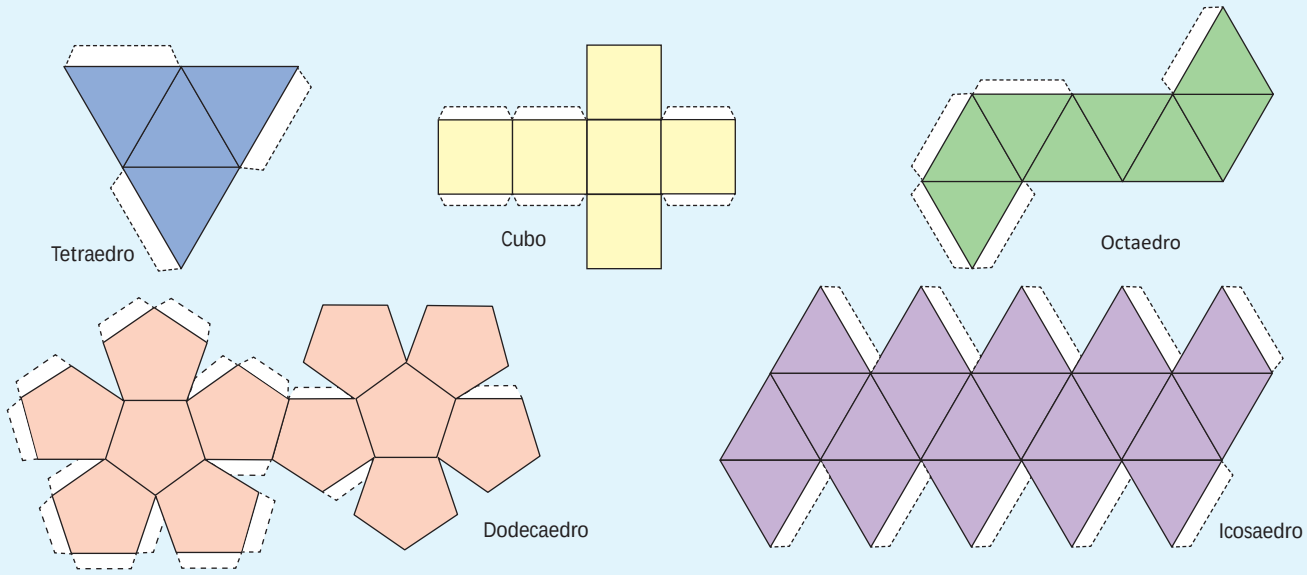
Observa los siguientes poliedros. Luego responde.



a) ¿Qué figuras forman las caras de la superficie de cada poliedro?
b) ¿Cuántas caras tiene cada poliedro?
c) ¿Qué característica es común en todos los poliedros?

	Tetaedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
a)	Triángulos	Cuadrados	Triángulos	Pentágonos	Triángulos
b)	4	6	8	12	20
c)	Están formados por caras que son polígonos regulares y todas las caras son congruentes entre sí.				

Un **poliedro regular** es el cuerpo geométrico en el cual todas sus caras son congruentes y son polígonos regulares. Se le llama plano desarrollado de un cuerpo geométrico, a la figura plana con la que se construyó el cuerpo geométrico. Ejemplo:



1. Completa la siguiente tabla:

	Tetaedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Cara de la superficie	Triángulos equiláteros	Cuadrados	**Triángulos equiláteros**	**Pentágonos regulares**	**Triángulos equiláteros**
Número de caras	**4**	**6**	8	**12**	**20**
Número de vértices	4	**8**	**6**	**20**	12

2. Construye polígonos regulares.

Ejercicio 1. Completa la siguiente tabla (en el libro ya están dados: la cara del tetraedro y del cubo, el número de caras del octaedro y el número de vértices del tetraedro y del icosaedro)

Columnas: Cara, Número de caras y Número de vértices, para tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

En un poliedro regular todas las caras son polígonos regulares congruentes. Tetraedro: caras de triángulos equiláteros, 4 caras y 4 vértices. Cubo: caras de cuadrados, 6 caras y 8 vértices. Octaedro: caras de triángulos equiláteros, 8 caras y 6 vértices. Dodecaedro: caras de pentágonos regulares, 12 caras y 20 vértices. Icosaedro: caras de triángulos equiláteros, 20 caras y 12 vértices. Los valores se escriben en rojo en la tabla de la página del libro y cumplen la relación de Euler (caras + vértices − aristas = 2) en los cinco casos.

Respuesta: **Cara: tetraedro, octaedro e icosaedro = triángulos equiláteros; cubo = cuadrados; dodecaedro = pentágonos regulares. Nº de caras: 4, 6, 8, 12, 20. Nº de vértices: 4, 8, 6, 20, 12**

Tabla completada:

	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Cara de la superficie	**Triángulos equiláteros**	**Cuadrados**	**Triángulos equiláteros**	**Pentágonos regulares**	**Triángulos equiláteros**
Número de caras	**4**	**6**	**8**	**12**	**20**
Número de vértices	**4**	**8**	**6**	**20**	**12**

Ejercicio 2. Construye polígonos regulares

Construir polígonos regulares con regla y compás.

Actividad abierta de construcción: se elaboran los polígonos regulares con regla y compás siguiendo el procedimiento de la clase 2.3 (por ejemplo, el hexágono regular: se traza una circunferencia y, sin cambiar la abertura del compás, se marca el radio seis veces sobre ella y se unen los puntos). No tiene una respuesta única.

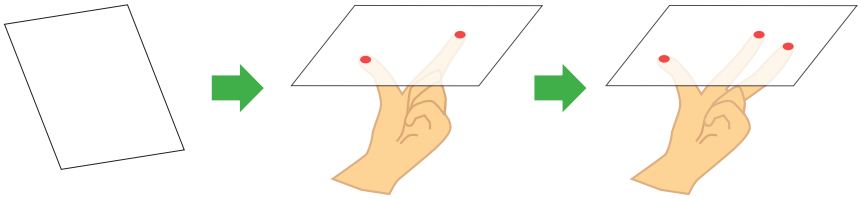
Respuesta: **Actividad abierta: construcción de polígonos regulares con regla y compás (sin respuesta única)**

3.3 Relación de posición entre rectas y planos

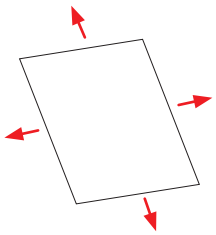
P

Toma una hoja de papel, ¿cómo se puede sostener una hoja de papel de forma estable, sin que haya un desbalance?

a) Intenta sostenerla utilizando únicamente dos dedos.
b) Intenta sostenerla utilizando tres dedos.
c) ¿Con cuál de las formas la hoja de papel es más estable?



Se puede tomar la idea de un plano como una hoja de papel, la cual se extiende indefinidamente, hacia los lados.



S

a) Si se toma con dos dedos la hoja de papel, queda siempre en desbalance.
b) Sin embargo, si se toma con tres dedos la hoja de papel queda firme, sin moverse.
c) Por tanto, una hoja de papel queda perfectamente sostenida utilizando tres dedos.

En la imagen se puede observar que la tapa del piano también está sostenida de forma estable por la base con forma de recta y un punto de soporte.

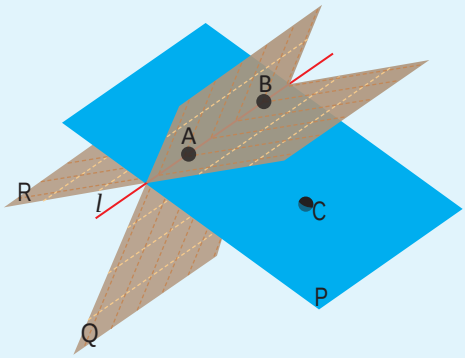
También se puede observar que el piano se mantiene estable con tres puntos de soporte.



C

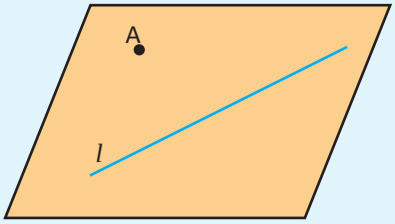
En geometría, un plano es un elemento de dos dimensiones (largo y ancho), pero carece de espesor o altura y se simbolizan con letras mayúsculas como: **P**, **Q**, **R**.

- Por dos puntos pasan muchos planos.
- Por tres puntos que no están en una línea pasa un único plano.

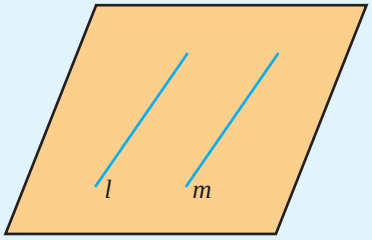


También, un plano queda determinado por:

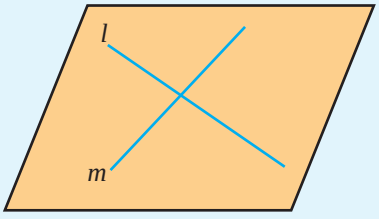
a) Una recta y un punto exterior a la recta.



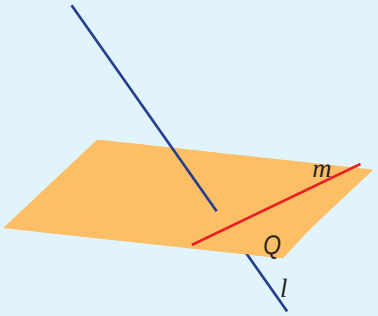
b) Dos rectas paralelas.



c) Dos rectas secantes que se cortan.

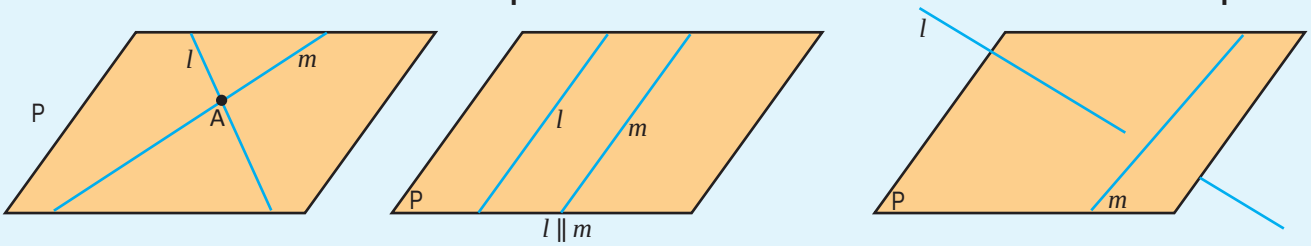


En geometría del espacio, dos rectas que no son paralelas y no se cortan, se dice que están en **posición cruzada** y se llaman **rectas cruzadas**. Así como l y m en la imagen.



Es decir, la relación de posición de dos líneas rectas en el espacio se puede clasificar como lo siguiente:

Sobre un mismo plano | **No están en el mismo plano**



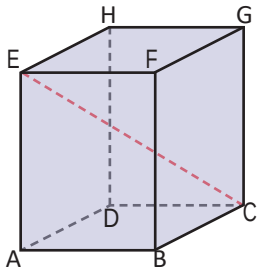
Rectas secantes | **Rectas paralelas** | **Rectas cruzadas**

E

Observa el prisma rectangular y responde:

Qué lados del prisma están sobre rectas que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por:

a) $\overline{BC}$
b) $\overline{EC}$



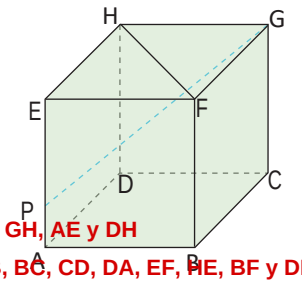
El segmento $\overline{EC}$ se dice que es la diagonal del prisma rectangular.

Solución.

a) Los lados: $\overline{AE}$, $\overline{DH}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$.
b) Los lados $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{HG}$ y $\overline{FG}$.

1. Observa el cubo y responde:

Qué lados están sobre rectas:



a) Secantes a la recta que pasa por $\overline{BC}$. AB, BF, CD y CG
b) Paralelas a la recta que pasa por $\overline{BC}$. DA, FG y HE
c) Que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por $\overline{BC}$. EF, GH, AE y DH
d) Que se encuentran en posición cruzada con la recta que pasa por $\overline{PG}$. AB, BC, CD, DA, EF, HE, BF y DH

2. Encuentra líneas rectas y objetos parecidos a planos en tu aula. Describe las relaciones de posición entre ellos, según lo aprendido.

a) ¿Puedes observar objetos sobre rectas paralelas?
b) ¿Puedes observar objetos sobre rectas que se intersectan?
c) ¿Puedes observar objetos sobre rectas cruzadas?

Ejercicio 1. En el cubo de la figura (P es un punto sobre la arista AE), responde:

a) ¿Cuáles segmentos son secantes al segmento BC?

Son secantes los que cortan a BC o comparten un extremo con él: AB y BF lo cortan en B, y CD y CG lo cortan en C. Los demás segmentos o son paralelos a BC o se cruzan con él.

Respuesta: AB, BF, CD y CG

b) ¿Cuáles segmentos son paralelos al segmento BC?

Tienen la misma dirección que BC los lados paralelos correspondientes del cubo: DA, FG y HE.

Respuesta: DA, FG y HE

c) ¿Cuáles segmentos son cruzados con el segmento BC?

No se cortan con BC ni son paralelos a él (están en planos distintos sin tocarse): EF y GH, que van en la dirección de profundidad en las caras superior e inferior, y AE y DH, las aristas verticales que no tocan a BC.

Respuesta: EF, GH, AE y DH

d) ¿Cuáles segmentos son cruzados con la recta PG?

La recta PG une el punto P (sobre la arista AE) con el vértice G. Se cruzan con ella los segmentos que no la tocan ni le son paralelos: AB, BC, CD y DA (las aristas de la cara inferior) y EF, HE, BF y DH. En cambio, FG, GH y CG la cortan en G, y AE la corta en P.

Respuesta: AB, BC, CD, DA, EF, HE, BF y DH

Ejercicio 2. Observa tu salón de clases y encuentra segmentos que sean paralelos, secantes y cruzados. Escríbelos en tu cuaderno

Actividad de observación en el aula.

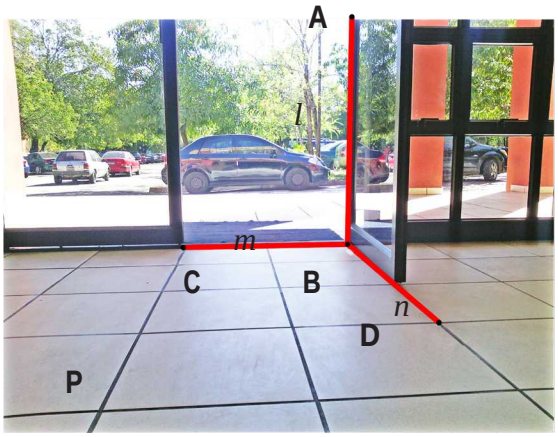
Ejemplo de respuesta: paralelos, los bordes superior e inferior de la pizarra (o los bordes opuestos de una ventana); secantes, dos bordes de la puerta que se encuentran en una esquina; cruzados, el borde superior de la pared del frente y el borde lateral del piso junto a la pared de atrás, porque no se cortan ni son paralelos. La respuesta depende del salón de clases.

Respuesta: Ejemplo: bordes opuestos de la pizarra (paralelos); bordes de la puerta en una esquina (secantes); borde superior de la pared del frente y borde lateral del piso (cruzados)

3.4 Perpendicularidad entre un plano y una recta

P

En la siguiente imagen se muestra una puerta abierta.



a) ¿Qué relación posicional tienen la recta que pasa por AB y la que pasa por BC?
b) ¿Qué relación posicional tienen la recta que pasa por AB y la que pasa por BD?
c) ¿Qué relación tiene la línea recta que pasa por AB con el plano P?

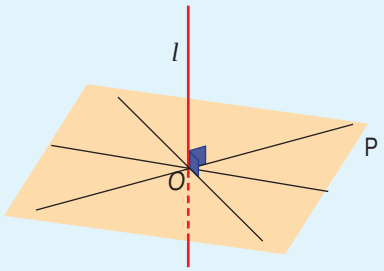
S

Según lo observado en la imagen:

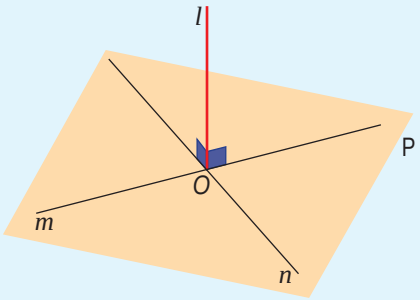
a) $l \perp m$
b) $l \perp n$
c) $l \perp$ P. Significa que el segmento AB es perpendicular al plano P.

C

Como lo muestra la imagen, la recta l es perpendicular a cualquier línea que está sobre el plano P y que pasa por la intersección de l y el plano P, en la imagen el punto O.



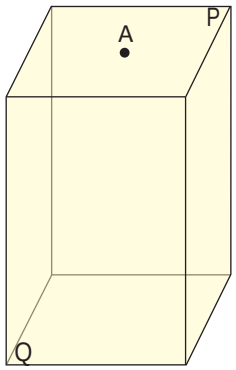
En este caso, se dice que la recta l es perpendicular al plano P.



Si una recta l es perpendicular a un plano P, entonces será perpendicular a todas las rectas que pasan por el punto O que es la intersección entre la recta l y el plano P. Como se muestra en la imagen de la izquierda.

E

En la imagen, hay un punto A sobre el plano P que es una base del prisma rectangular.

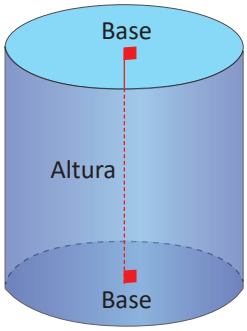


¿Cuál es el procedimiento para determinar la distancia del punto A hacia el plano Q?

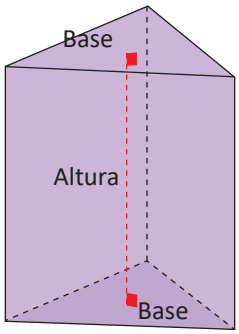
Solución.

Se debe trazar un segmento desde el punto A hacia el plano Q, que está sobre una recta perpendicular al plano Q.

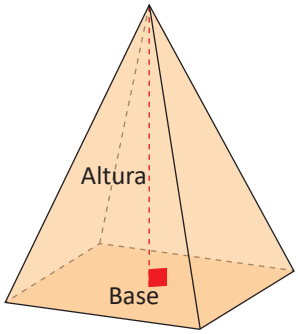
En prismas y cilindros las dos bases son paralelas y se llama altura al segmento que une las dos bases y es perpendicular a ellas. En pirámides y conos, la altura es el segmento que une el vértice y la base es perpendicular a esta última.



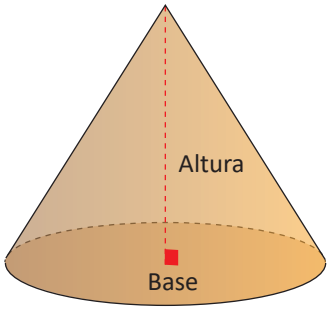
Cilindro



Prisma Triangular



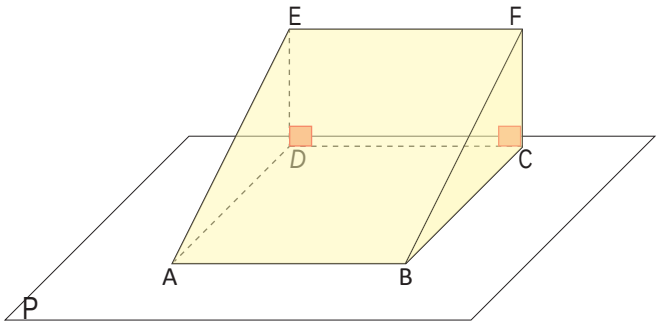
Pirámide



Cono

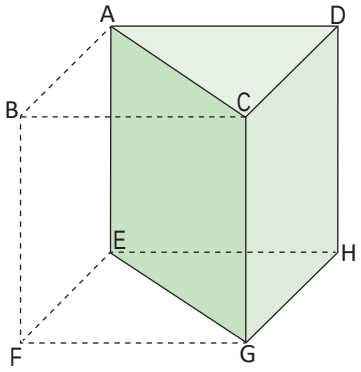
1. En la imagen hay un prisma triangular sobre un plano P:

a) ¿Qué segmentos son paralelos a $\overline{BC}$? **AD**
b) ¿Qué segmentos están en posición cruzada con $\overline{AE}$? **BC, CD y CF**
c) ¿Qué segmentos son perpendiculares al plano P? **DE y CF**
d) Identifica los lados del prisma que pueden ser la altura tomando como base la cara que cae sobre el plano P. **DE y CF**



2. En la imagen hay un prisma triangular dentro de un cubo.

a) ¿Qué segmentos son paralelos a $\overline{AC}$? **EG**
b) ¿Qué segmentos son perpendiculares a $\overline{DH}$? **AC, CD, DA, EG, GH y HE**
c) Identifica los lados del prisma que pueden ser la altura tomando como base $\overline{GH}$ **AE, CG y DH**



Ejercicio 1. En el prisma triangular de la figura, cuya base es la cara ABCD que está sobre el plano P, responde:

a) ¿Qué segmentos son paralelos a BC?

En el prisma, el único segmento con la misma dirección que BC es AD, el lado correspondiente de la misma cara ABCD. Los demás segmentos van en otras direcciones.

Respuesta: AD

b) ¿Qué segmentos son cruzados con AE?

El segmento AE es inclinado (une A con el vértice E sobre D). Se cruzan con él: BC y CD, de la cara base, y CF, la arista vertical del otro extremo. En cambio, BF es paralelo a AE y los demás segmentos lo cortan o comparten extremos con él.

Respuesta: BC, CD y CF

c) ¿Qué segmentos son perpendiculares al plano P?

El plano P es el que contiene a la cara ABCD. Los segmentos perpendiculares a ese plano son los que salen de la cara en dirección normal: DE y CF. (AE y BF son inclinados, no perpendiculares.)

Respuesta: DE y CF

d) Tomando como base la cara ABCD, ¿qué segmentos representan la altura del prisma?

La altura de un prisma es el segmento perpendicular comprendido entre la base y la cara opuesta; con la cara ABCD como base, las alturas son los mismos segmentos perpendiculares al plano P que unen las dos partes del prisma: DE y CF.

Respuesta: DE y CF

Ejercicio 2. En la imagen hay un prisma triangular dentro de un cubo (el prisma tiene por caras triangulares ACD y EGH). Responde:

a) ¿Qué segmentos son paralelos a AC?

AC es la diagonal de la cara superior del cubo. El único segmento del prisma con esa misma dirección es EG, la diagonal correspondiente de la cara inferior.

Respuesta: EG

b) ¿Qué segmentos son perpendiculares a DH?

DH es una arista vertical del cubo. Son perpendiculares a él todos los segmentos horizontales del prisma (los que están en los planos de las caras triangulares): AC, CD y DA de la cara superior, y EG, GH y HE de la cara inferior.

Respuesta: AC, CD, DA, EG, GH y HE

c) Identifica los lados del prisma que pueden ser la altura tomando como base GH.

Se toma como base la cara triangular que tiene por lado GH, es decir, la cara inferior EGH. La altura del prisma es el segmento perpendicular a esa base que une con la cara triangular opuesta; esos lados son las tres aristas verticales del prisma: AE, CG y DH.

Respuesta: AE, CG y DH

3.5 Cuerpos geométricos formados por el movimiento de figuras planas

P

Observa las situaciones presentadas en los literales, cada objeto deja un rastro al desplazarse, según la dirección de la flecha que le acompaña, ¿qué se logra formar en cada caso?

a) Un punto



b) Una recta

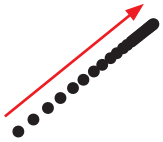


c) Un plano



S

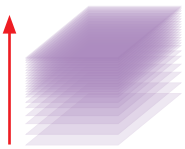
a) Se forma una recta



b) Se forma un plano



c) Se forma un prisma

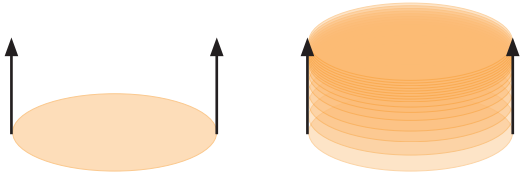


C

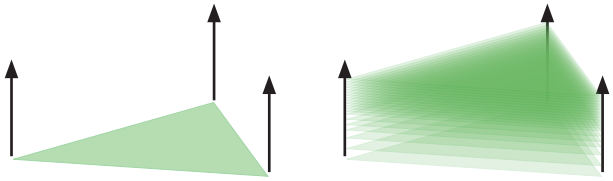
- La unión de infinitos puntos alineados forman una línea recta.
- La unión de infinitas rectas forman un plano.
- La unión de infinitos planos forman un cuerpo geométrico.

E

Si se desplaza el círculo verticalmente, como en la imagen, se obtiene un cilindro.

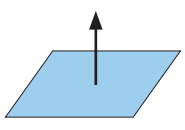


Si se desplaza verticalmente un triángulo, como en la imagen, se forma un prisma triangular.



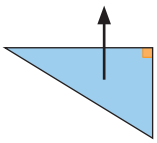
1. Tomando como base las siguientes figuras, dibuja en tu cuaderno, el cuerpo geométrico que se forma al desplazar verticalmente cada figura.

a)



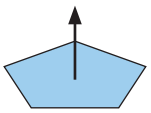
Prisma cuadrangular

b)



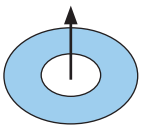
Prisma triangular

c)



Prisma pentagonal

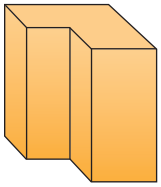
d)



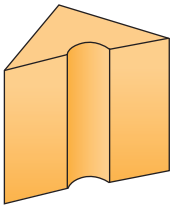
Cilindro hueco

2. En la imagen se observan dos cuerpos geométricos, dibuja la figura que se debe desplazar verticalmente, para lograr obtener el cuerpo geométrico.

a)



b)



Ejercicio 1. Tomando como base las siguientes figuras, dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico que se forma al desplazar verticalmente cada figura

a) Un paralelogramo.

Al desplazar verticalmente un paralelogramo, las caras laterales que se generan son rectángulos y el cuerpo es un prisma cuya base es el paralelogramo: un prisma cuadrangular (paralelepípedo).

Respuesta: Un prisma cuadrangular (paralelepípedo)

b) Un triángulo rectángulo.

Al desplazar verticalmente un triángulo rectángulo se genera un prisma de base triangular: un prisma triangular (recto).

Respuesta: Un prisma triangular

c) Un pentágono.

Al desplazar verticalmente un pentágono se genera un prisma de base pentagonal: un prisma pentagonal.

Respuesta: Un prisma pentagonal

d) Una corona circular (la región entre dos círculos concéntricos).

Al desplazar verticalmente una corona circular se genera un cilindro hueco (un tubo): las bases son las coronas y tiene superficie lateral externa e interna, ambas curvas.

Respuesta: Un cilindro hueco

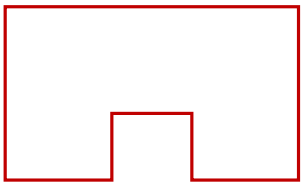
Ejercicio 2. Para cada cuerpo de la figura, identifica la figura plana que se desplazó verticalmente para generarlo

a) El primer cuerpo (una barra larga con un canal rectangular a lo largo de un lado).

El cuerpo se generó por desplazamiento vertical, así que la figura que se desplazó es su planta (la figura horizontal): un rectángulo con una muesca rectangular en el centro de uno de sus lados largos; esa muesca es la que forma el canal vertical que se observa en un lado del cuerpo. Se dibuja en la página adicional.

Respuesta: Un rectángulo con una muesca rectangular en uno de sus lados (dibujada en la página adicional)

La figura que se desplaza:



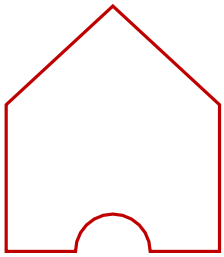
Rectángulo con una muesca rectangular

b) El segundo cuerpo (una barra larga con un canal semicilíndrico a lo largo).

La figura que se desplazó verticalmente es su planta: un pentágono tipo «casa» (un cuadrado con un triángulo encima como techo) con una semicircunferencia recortada en el centro del lado de la base; ese recorte es el que forma el canal semicilíndrico que se observa a lo largo del cuerpo. Se dibuja en la página adicional.

Respuesta: Un pentágono tipo «casa» con una semicircunferencia recortada en la base (dibujada en la página adicional)

La figura que se desplaza:



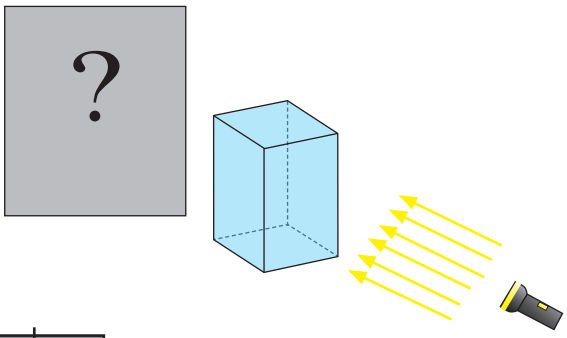
Pentágono con techo
y semicírculo recortado
en la base

3.6 Proyección ortogonal

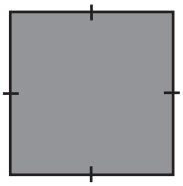
P

En la imagen, la lámpara proyecta rayos de luz que son perpendiculares a la pared gris. Entre la pared y los rayos de luz hay un prisma rectangular de base cuadrada, el cual proyecta una sombra sobre la pared. Según la forma en la que se gira el prisma se pude ver distintas sombras.

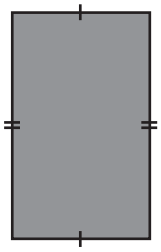
¿Cómo debe girarse el prisma para obtener las sombras que se muestran a continuación?



a)



b)



S

a) Para obtener esta sombra, el prisma debe girarse de forma que la base que lo sostiene quede frente a la pared.
b) Para obtener la sombra el prisma debe estar en la posición inicial que muestra la imagen.

C

La **proyección ortogonal** de un cuerpo es aquella donde las rectas proyectantes son perpendiculares al plano de proyección.

Si se tiene un prisma encerrado en tres paredes, considerando las paredes como planos, se puede dibujar la proyección ortogonal a cada uno de ellos como figuras planas, como lo muestra la imagen 3.

Se consideran tres tipos de perspectivas: **vista frontal**, **vista lateral** y **vista sobre el piso**.

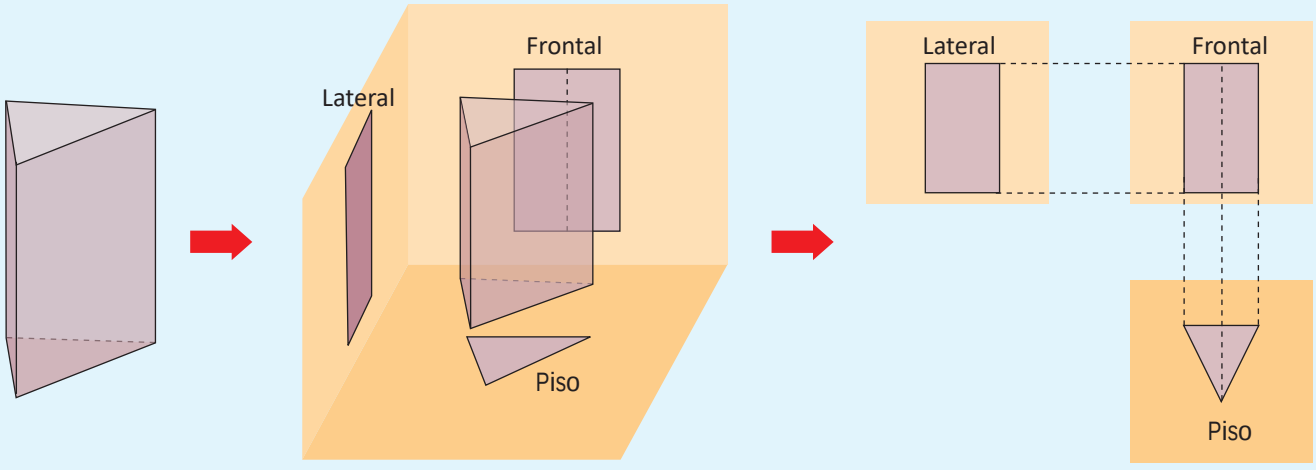
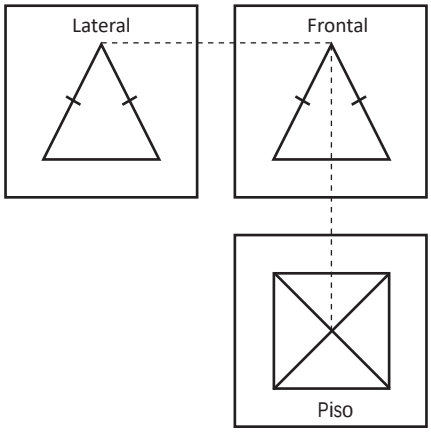


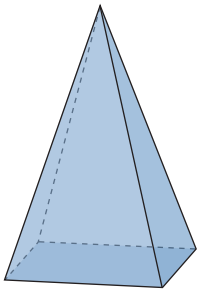
Imagen 1 Imagen 2 Imagen 3

E Dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico que corresponde a la proyección ortogonal mostrada y escribe el nombre del sólido.



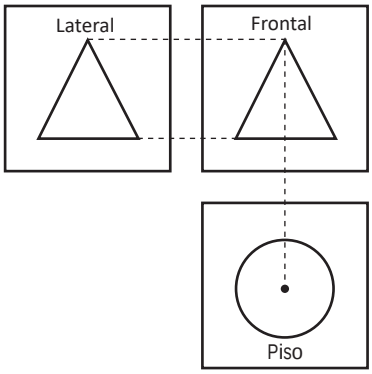
Solución.
Observando las imágenes, la perspectiva lateral y frontal son triángulos isósceles. Además, la perspectiva sobre el piso es un cuadrado con sus diagonales. Las líneas punteadas unen los vértices que coinciden.

Por tanto, la figura es una pirámide.


Pirámide

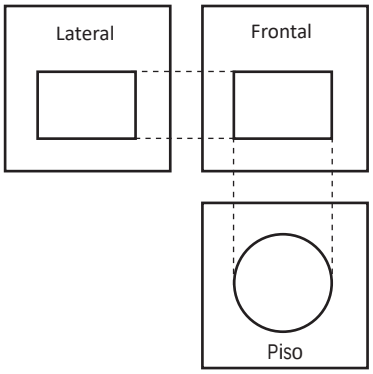
1. Dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico que generan la siguientes proyecciones ortogonales.

a)



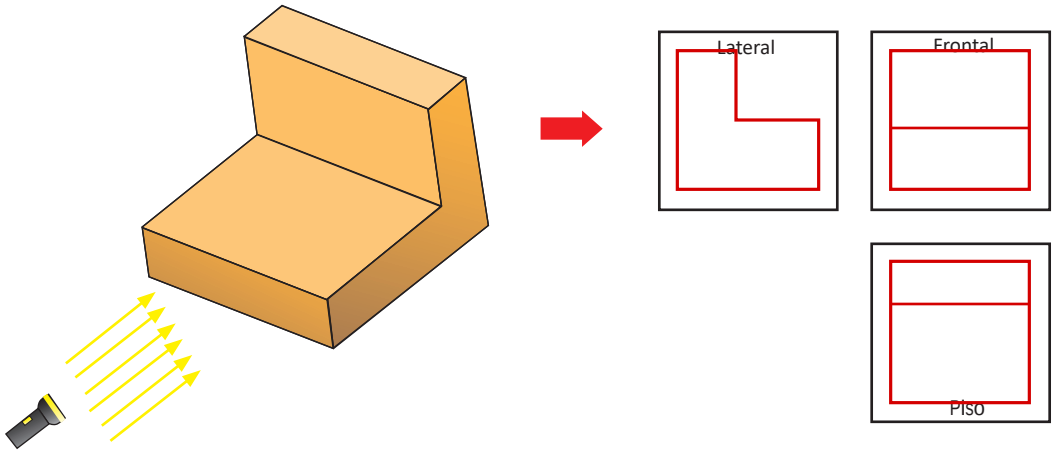
Cono

b)



Cilindro

2. Dibuja la proyección ortogonal de la siguiente figura.



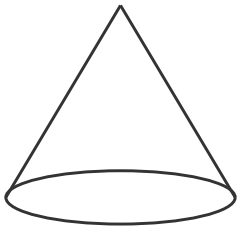
Ejercicio 1. Dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico que generan las siguientes proyecciones ortogonales

a) Perspectiva lateral: triángulo; perspectiva frontal: triángulo; perspectiva sobre el piso: un círculo con el centro marcado.

Que las perspectivas lateral y frontal sean triángulos indica un vértice superior que se proyecta en el centro; que la perspectiva sobre el piso sea un círculo indica una base circular. El cuerpo es un cono. Se dibuja en la página adicional.

Respuesta: **Un cono**

El cuerpo formado:



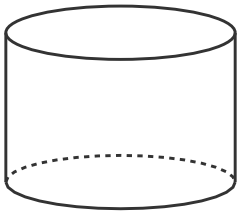
Cono

b) Perspectiva lateral: rectángulo; perspectiva frontal: rectángulo; perspectiva sobre el piso: un círculo.

Las perspectivas lateral y frontal rectangulares con la del piso circular corresponden a un cuerpo redondo de altura constante y base circular: un cilindro. Se dibuja en la página adicional.

Respuesta: **Un cilindro**

El cuerpo formado:



Cilindro

Ejercicio 2. Dibuja la proyección ortogonal de la siguiente figura (un cuerpo en forma de escalón: una base larga y baja con una parte más alta en un extremo, como un sofá)

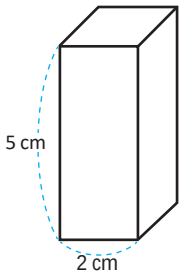
La figura está impresa junto a las casillas Frontal, Lateral y Piso.

Perspectiva frontal: se ve el largo total del cuerpo y la altura de la parte alta; la parte baja se distingue con una línea horizontal a la altura de su techo. Perspectiva lateral: se ve el perfil en forma de escalón o de L (la parte alta atrás y la baja adelante). Perspectiva sobre el piso: un rectángulo con una línea que separa la franja de la parte alta. Las tres proyecciones se dibujan en rojo en las casillas de la página del libro.

Respuesta: **Frontal: rectángulo con una línea horizontal; Lateral: perfil en forma de escalón; Piso: rectángulo con una línea (dibujadas en las casillas del libro)**

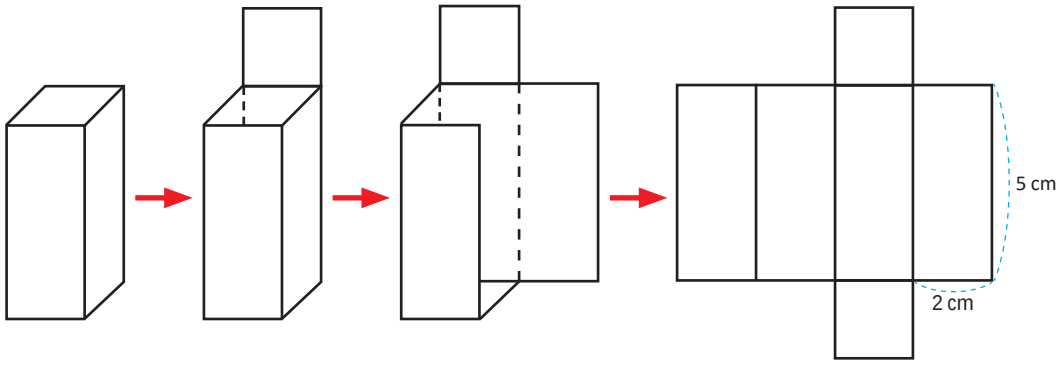
3.7 Desarrollo plano de un prisma y su área total

P Encuentra el área total de la superficie del prisma cuadrangular.



Se le llama superficie a la parte más externa del cuerpo geométrico.

S Como se muestra en la imagen, se puede descomponer el prisma cuadrangular como si fuese de papel.



La imagen final muestra el desarrollo plano del cuerpo geométrico. La figura está formada por 4 rectángulos congruentes y 2 cuadrados también congruentes, que son las bases del prisma.

El área de un rectángulo es: $5 \times 2 = 10$ cm^2.
El área de un cuadrado es: $2 \times 2 = 4$ cm^2.

Por tanto, el área total de la superficie es: $10 \times 4 + 4 \times 2 = 40 + 8 = 48$ cm^2.

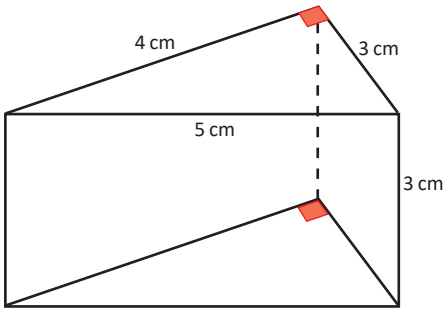
Área lateral **Área de las bases** **Área total**

C El área total de cualquier prisma puede obtenerse con la siguiente relación:

$$A_T = A_l + A_b$$

Donde A_l: Área lateral y A_b: Área de la base.

E Encuentra el área total del prisma triangular:



Solución.

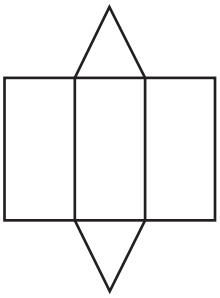
El área total del prisma se puede calcular con: $\mathbf{A_T = A_l + A_b}$.

$$\mathbf{A_l} = 5 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 3 = 15 + 12 + 9 = 36$$
$$\mathbf{A_b} = 4 \times 3 \div 2 + 4 \times 3 \div 2 = 6 + 6 = 12$$
$$\mathbf{A_T} = 36 + 12 = 48 \text{ cm}^2$$

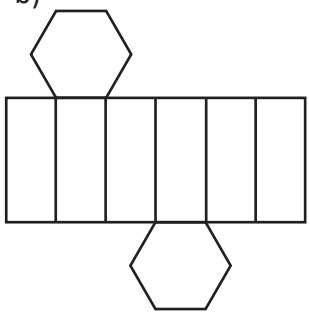
1. ¿Con cuál de los siguientes planos desarrollados se puede lograr construir un prisma hexagonal?

El literal b)

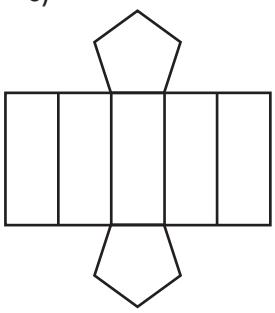
a)



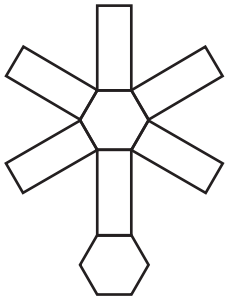
b)



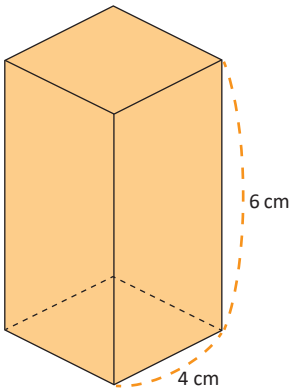
c)



d)



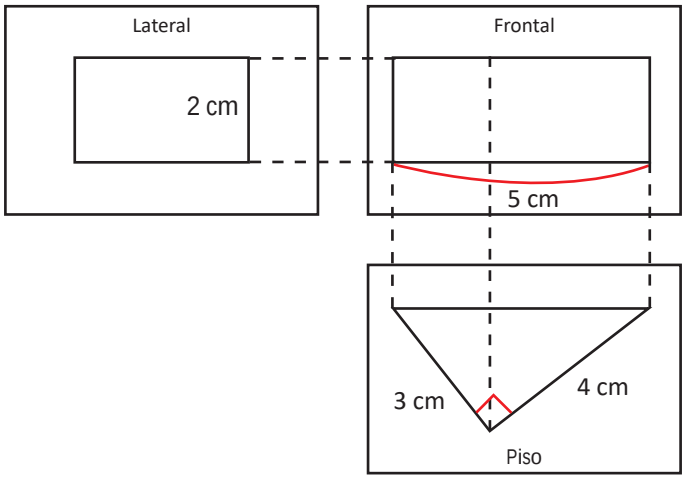
2. Encuentra el área total del prisma con base cuadrada. **128 cm²**



3. La imagen muestra la proyección ortogonal de un prisma triangular recto.

a) Dibuja en tu cuaderno la figura que se forma con las medidas dadas.

b) Encuentra el área total del prisma formado. **36 cm²**



Ejercicio 1. De los siguientes desarrollos planos, ¿cuál corresponde a un prisma hexagonal?

Literales a) un desarrollo de prisma triangular; b) una fila de seis rectángulos con un hexágono arriba y otro abajo; c) un desarrollo de prisma pentagonal; d) una fila de rectángulos con hexágonos, pero una de las bases es un pentágono.

Un prisma hexagonal tiene 6 caras laterales rectangulares y 2 bases hexagonales. El literal a) tiene bases triangulares (prisma triangular); el c) tiene bases pentagonales (prisma pentagonal); el d) trae una base hexagonal y la otra pentagonal, por lo que no puede cerrar como prisma hexagonal. Solo el literal b) tiene los seis rectángulos laterales y las dos bases hexagonales.

Respuesta: El literal b)

Ejercicio 2. Encuentra el área total del prisma con base cuadrada (base de 4 cm de lado y altura del prisma de 6 cm)

Se usa el procedimiento de la clase: AT = Ab + Al, con Ab el área de las dos bases.

Área de las bases: cada base es un cuadrado de 4 × 4 = 16 cm²; las dos bases: Ab = 2 × 16 = 32 cm². Área lateral: cada cara lateral es un rectángulo de 4 × 6 = 24 cm² y son 4 caras: Al = 4 × 24 = 96 cm². Área total: AT = 32 + 96 = 128 cm².

Respuesta: 128 cm²

Ejercicio 3. La imagen muestra la proyección ortogonal de un prisma triangular recto (la perspectiva sobre el piso es un triángulo rectángulo de catetos 3 cm y 4 cm e hipotenusa 5 cm, y la longitud del prisma es 2 cm)

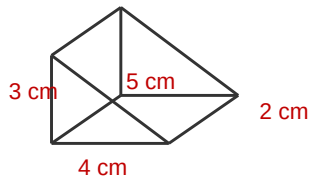
a) Dibuja en tu cuaderno la figura que se forma con las medidas dadas.

Con las proyecciones se reconstruye el sólido: es un prisma triangular recto cuya base es el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 cm y cuya longitud (distancia entre las bases triangulares) es 2 cm. Se dibuja en la página adicional.

Respuesta: Un prisma triangular recto de base 3-4-5 cm y longitud 2 cm (dibujado en la página adicional)

El prisma formado:

Prisma triangular recto
(dibujo esquemático)



b) Encuentra el área total del prisma formado.

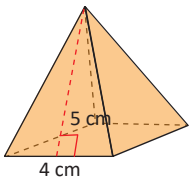
Área de las bases: cada base es un triángulo de 3 × 4 ÷ 2 = 6 cm²; las dos bases: Ab = 12 cm². Área lateral: las caras laterales son rectángulos de lados 3, 4 y 5 cm por la longitud 2 cm: Al = (3 + 4 + 5) × 2 = 24 cm². Área total: AT = 12 + 24 = 36 cm².

Respuesta: 36 cm²

3.8 Desarrollo plano de una pirámide y su área total

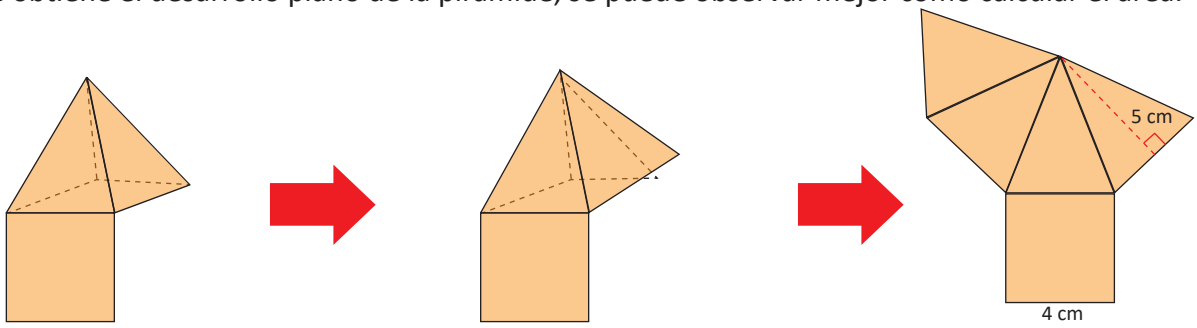
P

La imagen muestra una pirámide de base cuadrada.
Encuentra el área total de la superficie de la pirámide.



S

Si se obtiene el desarrollo plano de la pirámide, se puede observar mejor cómo calcular el área.



La pirámide está formada por 4 caras que son triángulos isósceles congruentes entre sí y por un cuadrado como base.

Área de un triángulo: $4 \times 5 \div 2 = 20 \div 2 = 10\ cm^2$
Área lateral: $A_l = 10 \times 4 = 40\ cm^2$
Área de la base: $A_b = 4 \times 4 = 16\ cm^2$
Área total: $A_T = A_l + A_b = 40 + 16 = 56\ cm^2$

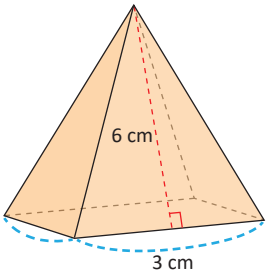
C

El área total de cualquier pirámide puede obtenerse con la siguiente relación:

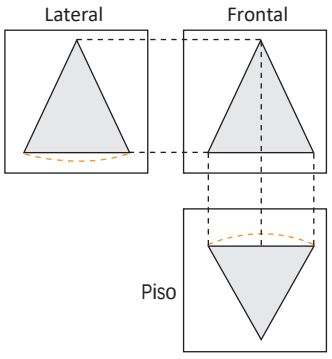
$$A_T = A_l + A_b$$

Donde A_l: Área lateral y A_b: Área de la base.

1. Encuentra el área total de la siguiente pirámide con base cuadrada. **45 cm²**



2. En la imagen de la derecha se observa la proyección ortogonal de una figura: Dibuja el cuerpo geométrico que se forma.



Una pirámide de base triangular (tetraedro)

Ejercicio 1. Encuentra el área total de la pirámide de base cuadrada de la figura (lado de la base 3 cm y altura de cada cara triangular 6 cm)

Se usa el procedimiento de la clase: AT = Al + Ab.

Área de un triángulo (cara lateral): 3 × 6 ÷ 2 = 9 cm². Área lateral: son 4 caras: Al = 9 × 4 = 36 cm². Área de la base: Ab = 3 × 3 = 9 cm². Área total: AT = 36 + 9 = 45 cm².

Respuesta: 45 cm²

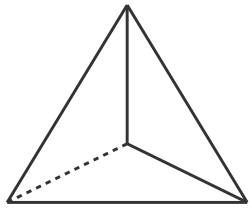
Ejercicio 2. Identifica el cuerpo geométrico a partir de sus proyecciones ortogonales (lateral: un triángulo; frontal: un triángulo con una línea punteada interior; piso: un triángulo)

Las tres perspectivas son triángulos.

Un cuerpo cuyas tres proyecciones son triángulos tiene todas sus caras triangulares y un vértice que se proyecta dentro de la base: es una pirámide de base triangular (un tetraedro). La línea punteada de la perspectiva frontal es la arista que queda oculta detrás de la cara frontal. Se dibuja en la página adicional.

Respuesta: Una pirámide de base triangular (tetraedro)

El cuerpo formado:

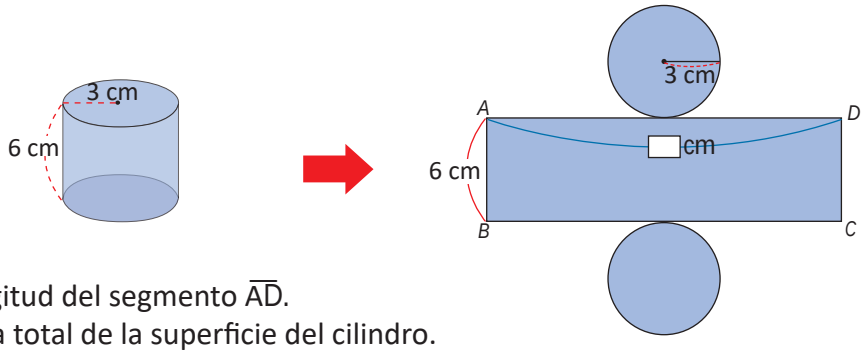


Pirámide de base triangular (tetraedro)

La arista punteada es la que queda oculta

3.9 Desarrollo plano de un cilindro y su área total

Se ha obtenido el desarrollo plano del cilindro con las medidas mostradas en la imagen:



a) Encuentra la longitud del segmento $\overline{AD}$.
b) Encuentra el área total de la superficie del cilindro.

S

a) La longitud del segmento $\overline{AD}$ coincide con la longitud de la circunferencia sobre él. Esta se puede obtener utilizando la fórmula para la longitud de la circunferencia: $l_c = 2\pi r$.

Por tanto: $AD = 2\pi \times 3 = 6\pi$ cm.

b) El área total del cilindro está formada por el área de las bases más el área lateral, la cual es el área del rectángulo.

Área de las bases: $A_b = 2\pi \times 3 \times 3 = 18\pi$ cm^2
Área del rectángulo: $A_l = \overline{AD} \times \overline{AB} = 6\pi \times 6 = 36\pi$ cm^2
Área total: $A_T = 18\pi + 36\pi = 54\pi$ cm^2

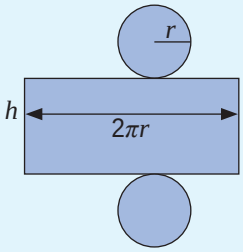
C

El área total de un cilindro se puede obtener mediante la relación:

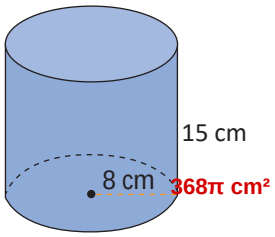
Área total de un cilindro = Área de las bases + Área lateral

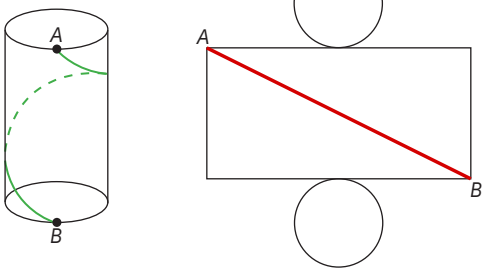
$$A_T = A_b + A_l$$
$$\mathbf{A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r \times h}$$

Donde r, es el radio del círculo y h, es la altura del cilindro.



1. Encuentra el área total del cilindro.





2. Según la imagen, se ha enrollado un hilo desde A hacia B a lo largo del cilindro. Si se obtiene el desarrollo plano del cilindro:

Dibuja cómo quedaría el hilo en el desarrollo plano.

Ejercicio 1. Encuentra el área total del cilindro (radio de la base 8 cm y altura 15 cm)

Se usa la fórmula de la clase: $AT = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ (las dos bases más el área lateral).

Área de las dos bases: $2\pi(8^2) = 128\pi$ cm². Área lateral: $2\pi(8)(15) = 240\pi$ cm². Área total: $AT = 128\pi + 240\pi = 368\pi$ cm².

Respuesta: **368π cm²**

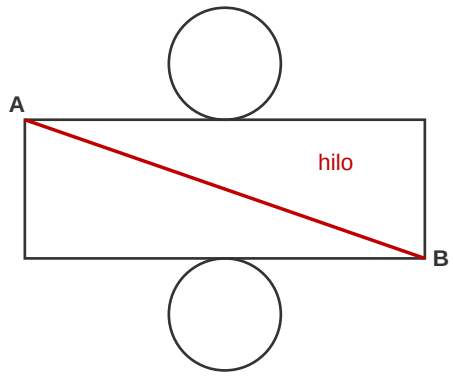
Ejercicio 2. Según la imagen, se ha enrollado un hilo desde A hacia B a lo largo del cilindro. Si se obtiene el desarrollo plano del cilindro: dibuja cómo quedaría el hilo en el desarrollo plano

En la imagen, A está en la esquina superior izquierda del rectángulo del desarrollo y B en la esquina inferior derecha.

Al enrollar el hilo sobre el cilindro dando una vuelta completa, en el desarrollo plano la superficie lateral es un rectángulo y el hilo, que sube de manera uniforme mientras rodea el cilindro, se convierte en la línea recta que une A con B: la diagonal del rectángulo. Se dibuja en rojo sobre el desarrollo impreso en la página del libro.

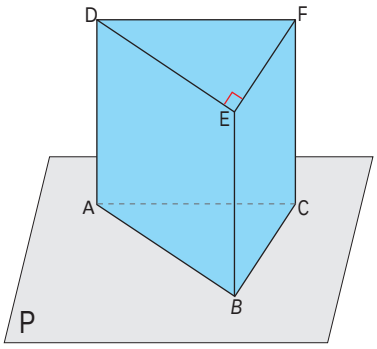
Respuesta: **El hilo queda como la diagonal del rectángulo del desarrollo, de A a B (dibujada en la página del libro)**

El desarrollo con el hilo:



3.10 Practica lo aprendido

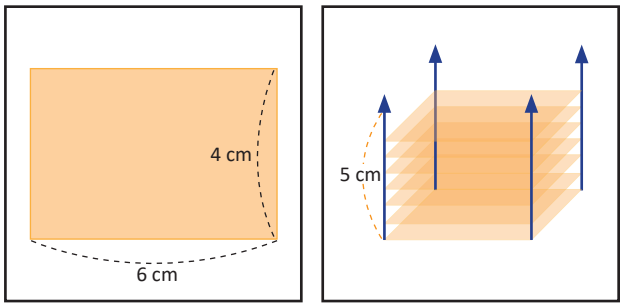
1. En la imagen se encuentra un prisma triangular sobre un plano P. Según lo que se observa en la imagen, responde:



a) ¿Qué segmentos son paralelos a $\overline{AB}$? **DE**
b) ¿Qué segmentos son perpendiculares a $\overline{ED}$? **AD, BE y CF**
c) ¿Qué segmentos del prisma están en posición cruzada con la recta que pasa por AB? **EF, FD y CF**
d) ¿Qué segmentos son perpendiculares al plano P? **AD, BE y CF**

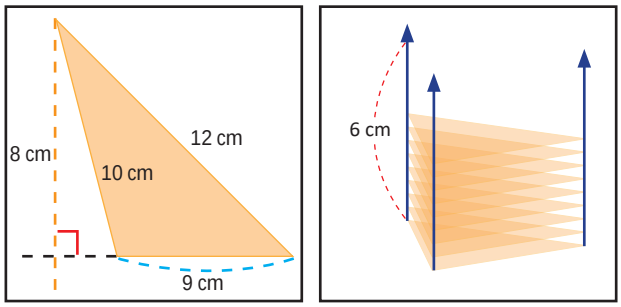
2. Para cada literal, dibuja en tu cuaderno el cuerpo geométrico formado, al desplazar la figura verticalmente y encuentra el área total del cuerpo.

a)



AT = 148 cm²

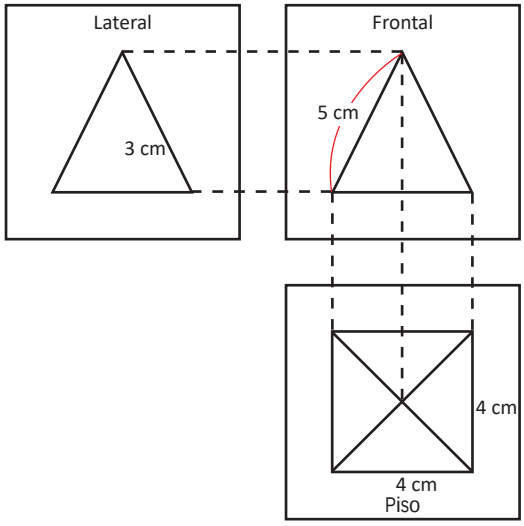
b)



AT = 258 cm²

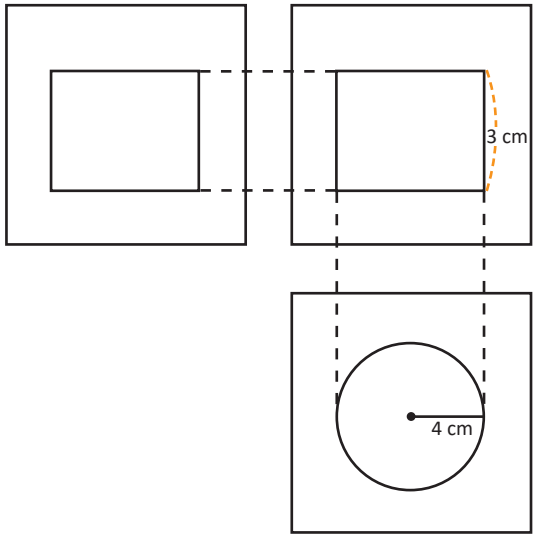
3. En las siguientes proyecciones ortogonales dibuja en tu cuaderno el cuerpo formado y encuentra su área total.

a)



Pirámide de base cuadrada · AT = 56 cm²

b)



Cilindro · AT = 56π cm²

Ejercicio 1. En el prisma triangular de la figura, cuya base está sobre el plano P, responde:

a) ¿Qué segmentos son paralelos a AB?

El único segmento con la misma dirección que AB es DE, el lado correspondiente de la cara triangular superior.

Respuesta: **DE**

b) ¿Qué segmentos son perpendiculares a ED?

ED es un lado de la cara triangular superior. Los segmentos perpendiculares a él son las tres aristas que unen las dos caras triangulares: AD, BE y CF (la figura trae la marca de ángulo recto entre BE y ED).

Respuesta: **AD, BE y CF**

c) ¿Qué segmentos son cruzados con la recta AB?

No cortan a la recta AB ni son paralelos a ella: EF y FD, de la cara triangular superior, y CF, la arista vertical del vértice C.

Respuesta: **EF, FD y CF**

d) ¿Qué segmentos son perpendiculares al plano P?

El plano P contiene a la cara triangular de abajo. Los segmentos perpendiculares a ese plano son las tres aristas que unen ambas caras: AD, BE y CF.

Respuesta: **AD, BE y CF**

Ejercicio 2. Encuentra el área total del cuerpo que se forma al desplazar verticalmente cada figura

a) Un rectángulo de 6 cm × 4 cm que se desplaza 5 cm.

El cuerpo es un prisma rectangular (paralelepípedo) de 6 × 4 × 5 cm. Área total: AT = 2(6 × 4) + 2(6 × 5) + 2(4 × 5) = 48 + 60 + 40 = 148 cm².

Respuesta: **148 cm²**

b) Un triángulo de base 9 cm y altura 8 cm, con los otros lados de 10 cm y 12 cm, que se desplaza 6 cm.

El cuerpo es un prisma triangular. Área de cada base: 9 × 8 ÷ 2 = 36 cm²; las dos bases: 72 cm². Área lateral: el perímetro de la base es 9 + 10 + 12 = 31 cm, por el desplazamiento de 6 cm: Al = 31 × 6 = 186 cm². Área total: AT = 72 + 186 = 258 cm². (Las medidas son las que trae rotuladas la figura.)

Respuesta: **258 cm²**

Ejercicio 3. Identifica el cuerpo geométrico a partir de sus proyecciones ortogonales y encuentra su área total

a) La perspectiva sobre el piso es un cuadrado de 4 cm de lado con sus diagonales; la frontal muestra la altura de las caras de 5 cm (y la lateral, la altura del cuerpo de 3 cm).

Un cuadrado con sus diagonales en la perspectiva sobre el piso indica una base cuadrada cuyo centro se proyecta en el cruce de las diagonales: el cuerpo es una pirámide de base cuadrada. Área: cada cara triangular mide 4 × 5 ÷ 2 = 10 cm²; Al = 10 × 4 = 40 cm²; Ab = 4 × 4 = 16 cm²; AT = 40 + 16 = 56 cm². (El área se calcula con la altura de las caras, 5 cm, con el procedimiento de la clase 3.8, igual que en el ejemplo resuelto de esa clase.)

Respuesta: **Pirámide de base cuadrada; AT = 56 cm²**

b) La perspectiva sobre el piso es un círculo de radio 4 cm y la frontal es un rectángulo de altura 3 cm.

La perspectiva sobre el piso circular y la frontal rectangular corresponden a un cilindro de radio 4 cm y altura 3 cm. Área total: $AT = 2\pi(4^2) + 2\pi(4)(3) = 32\pi + 24\pi = 56\pi$ cm².

Respuesta: Cilindro; $AT = 56\pi$ cm²

MI NUEVA ESCUELA
Reforma Educativa

GOBIERNO DE EL SALVADOR

MINISTERIO DE EDUCACIÓN